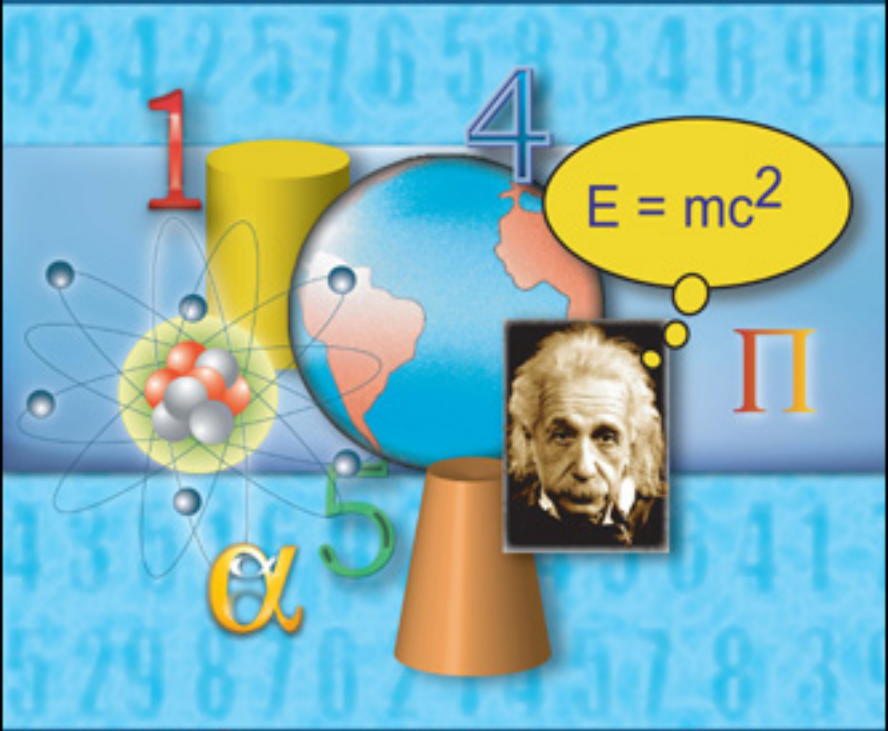
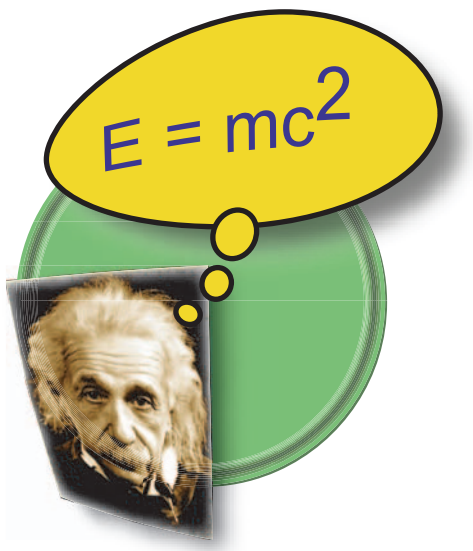
FÓRMULAS MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA ARITMÉTICA TRIGONOMETRÍA



GEOMETRÍA FÍSICA QUÍMICA

FÓRMULAS MATEMÁTICAS



LEXUS

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

IDEA, DISEÑO Y REALIZACIÓN
Departamento de Creación Editorial de Lexus Editores

© LEXUS EDITORES S.A.
Av. Del Ejército 305 Miraflores, Lima-Perú
www.lexuseditores.com

Primera edición, febrero 2008

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca
Nacional del Perú: 2008-01603

ISBN: 978-9972-209-54-3

EDICIÓN 2008

PRESENTACIÓN

Al igual que René Descartes, gran matemático y filósofo del siglo XVII, quien hubiera preferido una ciencia única o "matemática universal", que explique el *orden* y la *medida* de la naturaleza, sin importar si la unidad de medida son números, o ecuaciones o gráficos, el presente "Formulario Matemático" pretende realizar una exposición de todos los métodos matemáticos en un solo documento.

Como es habitual, Editorial Lexus pone a disposición del estudiante avanzados recursos que contribuirán a minimizar diferencias teóricas y prácticas entre el nivel secundario y la universidad. Se ha pretendido crear un manual educativo para que el alumno en la etapa preuniversitaria, a través de la práctica directa de sus ejercicios, pueda auto-evaluarse y pronosticar sus capacidades con vistas a iniciar sus estudios superiores. Y, al mismo tiempo, servir como obra de consulta general.

La preparación de esta formidable obra ha sido posible debido a la participación de un selecto equipo de estudiantes universitarios y calificados docentes especialistas. Este libro resume más de 4 mil maravillosos años de investigación matemática. Desde las antiguas aritmética y álgebra, escudriñadas por babilonios y egipcios hasta las modernas técnicas y aplicaciones, que permiten actividades cotidianas de complicado análisis, como el pronóstico del tiempo, el movimiento bancario o la telefonía móvil, imposibles sin el concurso de todas las disciplinas matemáticas.

Este manual incluye secciones de Física y Química pues, como señalaba Von Neumann, las matemáticas poseen una doble naturaleza: las matemáticas como cuerpo científico propio, independientes de otros campos, y las matemáticas relacionadas con las ciencias naturales. De hecho, muchos de los mejores resultados alcanzados en las matemáticas modernas han sido motivados por las ciencias naturales y, similarmente, hay una tremenda *matematización* de las partes teóricas de dichas ciencias[1].

El método práctico utilizado en toda la extensión de esta obra, conduce al lector de una manera didáctica a lo largo de la asignatura, pasando de lo más sencillo a lo más complejo, con numerosos ejercicios resueltos y propuestos. La resolución de problemas y el repaso teórico no dudamos que le darán al estudiante una base muy sólida para que destaque en las aulas universitarias de pre-grado o post-grado.

Los Editores

[1] Referencias históricas consultadas en: José M. Méndez Pérez. "Las Matemáticas: su Historia, Evolución y Aplicaciones". Archivo online: http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/Mendez2003-04-extendida.doc.

SUMARIO

Pag.

Aritmética ... 15

Definición, Lógica matemática, Proporciones lógicas, Conectivos lógicos ... 15
Proporciones simples, Proporciones compuestas básicas ... 16
Tablas de verdad de las proporciones compuestas básicas ... 16
Tipo de proporciones, Tautología ... 16
Contradicción, Contingencia ... 17
Leyes lógicas principales ... 17
Teoría de conjuntos, Conceptos básicos, Formas de expresar un conjunto ... 19
Principales símbolos ... 19
Notación de los conjuntos, La recta real ... 20
Características de los conjuntos, Relaciones entre conjuntos ... 21
Conjunto de conjunto o conjunto de partes, Potencia de un conjunto ... 21
Diagramas de Venn, Operaciones con conjuntos ... 22
Unión de conjuntos, Intersección de conjuntos, Diferencia de conjuntos ... 22
Complemento de un conjunto, Diferencia simétrica ... 23
Producto cartesiano de dos conjuntos, Relaciones ... 23
Tipos de relaciones en un conjunto, Reflexiva, Simétrica, Transitiva ... 24
Funciones, Definición, Sistema de numeración ... 25
Numeración, Definición ... 25
Formación de un sistema de numeración ... 26
Convención, Cifras mínimas ... 26
Operaciones aritméticas básicas no decimales ... 27
Suma, Resta, Multiplicación ... 27
División, Cambios de base de un sistema de numeración ... 28
Cambios de base se un sistema de numeración ... 28
Conteo de cifras al escribir la serie natural ... 29
Sumatoria de primeros números de la serie natural en base 10 ... 29
Operaciones básicas sobre números reales ... 30
Suma o adición, Resta o sustracción ... 30
La multiplicación, La división ... 31
Alternaciones de los términos de una división ... 32
Relaciones notables de las cuatro operaciones ... 33
Propiedades de los números, Divisibilidad (en Z), Divisor, Múltiplo ... 33
Propiedades de la divisibilidad, Reglas prácticas de divisibilidad ... 34

Números congruentes, Números primos (en ℕ) … 35
Números compuestos, Criba de Eratóstenes, Reglas para su construcción … … … … … … … … 36
Fórmulas generales … 36
Máximo común divisor(M.C.D.), Mínimo común múltiplo(m.c.m.) … … … … … … … … … … … 37
Propiedades, Números racionales(fracciones) … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 38
Fracciones ordinarias, Clasificación … 38
Fracciones decimales, Clasificación … 39
Transformación de fracciones, Potencia y radicación de cuadrados y cubos … … … … … … … … 40
Cuadrado y raíz cuadrada … 40
Cuadrado, Cuadrado perfecto, Raíz cuadrada … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 40
Cubo, Raíz cúbica, Sistema de medidas, Sistemas tradicionales … … … … … … … … … … … … 41
Sistema métrico … 41
Medidas agrarias, Medidas de volumen, Medidas de capacidad, Medidas de peso … … … … … … 42
Sistema español, Superficie, Agraria, Volumen, Peso … … … … … … … … … … … … … … … … 42
Sistema inglés, Longitud, Sueperficie, Agraria … … … … … … … … … … … … … … … … … … 42
Volumen, Capacidad, Sistema Avoirdupois, Densidad de algunos cuerpos … … … … … … … … 43
Relaciones entre longitud y tiempo, Dimensiones geográficas … … … … … … … … … … … … 43
Sistema internacional(S.I.), Unidades de bases … … … … … … … … … … … … … … … … … … 43
Unidades suplementarias, Razones y proporciones, Razones … … … … … … … … … … … … … 44
Propiedades y leyes, Proporciones, Proporción artimética … … … … … … … … … … … … … 44
Proporción geométrica, Clases de proporciones según sus términos … … … … … … … … … … 44
Términos notables, Promedios, Propiedades de las proporciones geométricas … … … … … … 45
Magnitudes proporcionales, Regla de tres, Regla de tres simple … … … … … … … … … … … 46
Regla del tanto por ciento, Regla de tres compuesta … … … … … … … … … … … … … … … 46
Aritmética mercantil, Interés simple, Interés o rédito … … … … … … … … … … … … … … … 46
Fórmulas básicas … 46
Descuento, Descuento comercial, Descuento racional … … … … … … … … … … … … … … … 47
Comparación del descuento comercial con el descuento racional … … … … … … … … … … … 48
Vencimiento común, Descuentos sucesivos, Aumentos sucesivos … … … … … … … … … … … 48
Repartimiento proporcional, Tipología … 49
Repartimiento proporcional compuesto … 50
Aplicaciones, Regla de compañía o de sociedad, Regla de compañía compuesta … … … … … 50
Regla de mezcla o aligación, Mezcla, Regla de mezcla directa … … … … … … … … … … … … 50
Regla de mezcla inversa, Aleación, Ley de aleación … … … … … … … … … … … … … … … … 51
Aleación directa, Aleación inversa, Cambios en la ley de una aleación … … … … … … … … … 51
Aumento de la ley de una aleación, Disminución de la ley de una aleación … … … … … … … 51
Ley de kilates … 52

Álgebra ... 53

Definición, Notación usada en el álgebra ... 53
Operaciones fundamentales con los números relativos ... 54
Suma, Sustracción, Multiplicación ... 54
División, Potencia, Raíces ... 55
Expresiones algebraicas, Principales conceptos, Término algebraico ... 55
Expresión algebraica ... 55
Clasificación de las expresiones algebraicas ... 55
Racionales, Irracionales ... 55
Teoría de exponentes, Operaciones de exponentes, Ley de signos ... 56
Ecuaciones Exponenciales, Valor numérico ... 57
Grado de las expresiones algebraicas, Grados ... 57
Grados de un monomio, Grados de un polinomio ... 57
Polinomios, Notación polinómica, Polinomios especiales ... 58
Polinomios ordenados, Polinomio completo ... 58
Polinomio Homogéneo, Polinomios idénticos ... 58
Polinomio idénticamente nulo, Polinomio entero en “x” ... 59
Operaciones con expresiones algebraicas ... 59
Suma y resta de expresiones algebraicas, Supresión de signos de colección ... 59
Multiplicación de expresiones algebraicas, Propiedades de la multiplicación ... 59
Casos en la multiplicación, Productos notables ... 60
División algebraica, Propiedades de la división ... 61
Casos en la división, División de dos monomios ... 61
División de polinomios, Método normal ... 61
Método de coeficientes separados, Método de Horner ... 62
Método o regla de Rufinni ... 63
Teorema del resto, Divisibilidad y cocientes notables ... 65
Principios de la divisibilidad ... 65
Cocientes notables(CN), Forma general de los cocientes notables ... 66
Regla práctica para desarrollar cualquier cociente notable ... 66
Métodos de factorización, Factor común, ... 67
Método de identidades, Método del aspa ... 68
Método de evaluación o de divisores binomios ... 69
Método de artificios de cálculo, Sumas y restas, Cambio de variable ... 70
Factorización recíproca, Factorización simétrica alternada ... 71
Polinomio simétrico, Polinomio alterno ... 71
Propiedades de las expresiones y los polinomios simétricos y alternos ... 71
Factorización de un polinomio simétrico y alternado ... 72
Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo ... 72
Fracciones algebraicas, Definición ... 73

Cambios de signo en una fracción ... 73
Simplificación de fracciones, Binomio de Newton ... 73
Análisis combinatorio, Factorial de un número ... 73
Variaciones, Permutaciones, Combinaciones ... 74
Propiedades de las combinaciones ... 74
Desarrollo del binomio de Newton, Método inductivo ... 75
Propiedades del Binomio de Newton ... 76
Cálculo de término general $t_{(k+1)}$, Término central ... 76
Término de Pascal o de Tartaglia, Procedimiento ... 77
Desarrollo del binomio de Newton con exponente negativo y/o fraccionario ... 77
Radicación, Definición ... 77
Elemento de una raíz, Signo de las raices ... 78
Radicación de expresiones algebraicas ... 78
Raíz de un monomio, Raíz cuadrada de un polinomio ... 78
Raíz cúbica de un polinomio ... 79
Descomposición de radicales dobles en simples ... 80
Operaciones con radicales, Conceptos básicos ... 81
Radicales homogéneos, Homogenización de radicales ... 81
Radicales semejantes, Teorema fundamental de los radicales ... 81
Operaciones algebraicas con radicales ... 81
Suma y resta de radicales, Multiplicación de radicales ... 81
División de radicales, Potencia de radicales, Raíz de radicales ... 82
Fracción irracional, Racionalización, Factor racionalizante (F.R.) ... 82
Racionalización del denominador de una fracción, Primer caso, Segundo caso ... 82
Tercer caso. Cuarto caso, Verdadero valor de fracciones algebraicas ... 83
Verdadero valor (V.V.), Cálculo del verdadero valor ... 84
Cantidades imaginarias, Conceptos ... 85
Números complejos, Representación gráfica de un complejo ... 86
Operaciones con complejos, Determinantes, Matriz ... 87
Determinante, Orden del determinante ... 88
Método para hallar el valor de un determinante, Regla de Sarrus ... 88
Forma práctica de la regla de Sarrus, Menor complementario ... 89
Propiedades de los determinantes, Ecuaciones y sistemas de ecuaciones ... 90
Clases de igualdad ... 90
Principios fundamentales de las igualdades para la trasformación de ecuaciones ... 91
Sistema de ecuaciones, Clasificación de los sistemas de ecuaciones ... 91
Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, Método de sustitución ... 91
Método de igualación, Método de reducción, Método de los determinantes ... 92
Ecuaciones de segundo grado y ecuaciones bicuadráticas ... 93

Ecuaciones de segundo grado … 93
Discusión del valor de las raíces … 94
Propiedades de las raíces, Ecuaciones bicuadradas … 94
Propiedades de las raíces de una ecuación bicuadrada … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 95
Ecuaciones recíprocas, Ecuaciones binomias y trinomias … … … … … … … … … … … … … … … … … 95
Ecuaciones que se resuelven mediante artificio, Desigualdad e inecuaciones … … … … … … … … 96
Desigualdad, Propiedades de las desigualdades … 96
Clases de desigualdades, Inecuaciones de primer grado con una incógnita … … … … … … … … … 97
Solución de una inecuación … 97
Sistema de inecuaciones con una incógnita, Inecuaciones de segundo grado … … … … … … … … 98
Progresiones, Definición, Progresión aritmética “P.A.” … … … … … … … … … … … … … … … … … 99
Progresión geométrica “P.G.” … 100
Logaritmos, Principales conceptos, Sistema de logaritmos … … … … … … … … … … … … … … … 101
Propiedades de logaritmos, Cologaritmo, Antilogaritmo … … … … … … … … … … … … … … … … 102
Cambio de un sistema de logaritmos a otro, Logaritmos como progresiones … … … … … … … … 102
Sistema de logaritmos neperianos, Sistema de logaritmos decimales … … … … … … … … … … … 103
Interés compuesto y anualidades, El interés compuesto … … … … … … … … … … … … … … … … 104
Anualidad de capitalización(Ac), Anualidad de amortización(Aa) … … … … … … … … … … … … 105

Geométria … 106

Definición, Geométria plana, Ángulos, Teoremas básicos … … … … … … … … … … … … … … … … 106
Teoremas básicos, Teoremas auxiliares … 106
Valor de los ángulos en la circunferencia … 107
Distancia de un punto a una recta, Triángulos, Líneas principales del triángulo … … … … … … … 108
Altura, Mediana … 108
Mediatriz, Bisectriz … 109
Igualdad de triángulos, Teoremas derivados de la igualdad de triángulos … … … … … … … … … 110
Semejanza de triángulos, Teoremas derivados de la semejanza de triángulos … … … … … … … … 111
Teorema de Thales, Teorema de Menelao, Teorema de Ceva … … … … … … … … … … … … … … … 111
Relaciones métricas en el triángulo rectángulo … 112
Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 112
Relación de lados con la mediana, Relación de lados de ángulos: 30º, 60º, 90º … … … … … … … 113
Relación de lados con segmentos determinados por la bisectriz … … … … … … … … … … … … … 114
Relación de lados con bisectriz … 114
Relación de lados en desigualdad … 115
Circunferencia, Posiciones relativas de dos circunferencias … … … … … … … … … … … … … … 115
Circunferencias ortogonales, Cuadrilátero inscrito a una circunferencias … … … … … … … … … 116
Cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, Propiedades de las tangentes … … … … … … … 116
Teoremas fundamentales en la circunferencia … 117
Líneas proporcionales en el círculo … 117
Potencia de un punto, Lugar geométrico, Eje radical … … … … … … … … … … … … … … … … … 118

Posiciones del eje radical, Propiedades del eje radical ... 119
Centro radical, Mediana y extrema razón de un segmento o sección aúrea ... 119
División armónica de un segmento, Haz armónico ... 120
Polígonos, Definición y conceptos ... 120
Cálculo de los elementos de los polígonos irregulares ... 121
Valor de los elementos de los polígonos regulares ... 121
Conclusiones sobre los polígonos regulares ... 123
Área de las regiones planas, Región ... 124
Relaciones de áreas de triángulos, Propiedades de los cuadriláteros ... 125
Teorema de Euler, Teorema de Ptolomeo(1), Teorema de Ptolomeo(2) ... 125
Semejanza de polígonos, Áreas de las regiones curvas ... 126
Geometría del espacio, Teoremas fundamentales, Ángulo triedro, Poliedros ... 127
Teorema de Euler, Poliedro regular ... 128
Prisma, Prisma regular, Cálculo de los elementos de los poliedros ... 129
Tronco de prisma, Pirámide, Pirámide regular ... 130
Pirámide irregular, Semejanza de pirámides, Tronco de pirámide ... 131
El cono, Definiciones, Cono de revolución ... 132
Cono oblícuo, Semejanza de conos, Tronco de cono ... 132
El cilindro, Cilindro recto, Cilindro oblícuo, Tronco de cilindro ... 134
La esfera, Superficie y volumen de la esfera, Partes de área de esfera ... 135
Partes de volúmenes de una esfera, Segmento esférico, Cuña esférica ... 136
Sector esférico, Anillo esférico ... 137
Sólidos de revolución, Teorema de Guldin Pappus (Áreas) ... 138
Teorema de Guldin Pappus (volumen) ... 138
Leyenda general ... 139

Trigonometría ... 140

Definición, Medida de ángulos, Sistemas de medición de ángulos ... 140
Sexagesimal, Centesimal, Radial, Equivalencia entre los tres sistemas ... 140
Longitud de un arco ... 140
Funciones trigonométricas en el triágulo rectángulo, Funciones básicas ... 140
Tabla de valores de funciones trigonométricas de triángulos notables ... 141
Ángulos directrices ... 142
Signo de las funciones trigonométricas según el cuadrante ... 143
Variación de las funciones trigonométricas según el cuadrante ... 144
Intervalo de las funciones trigonométricas ... 144
Dominio y rango de las funciones trigonométricas ... 144
Relación de funciones trigonométricas en términos de una sola ... 145
Arcos compuestos, Funciones de la suma y diferencia de arcos ... 146

Funciones de la suma de tres arcos ... 146
Funciones de arcos dobles, Funciones de arco mitad, Funciones de arcos triples ... 147
Funciones auxiliares, Transformación a producto ... 147
Limites trigonométricos, Funciones trigonométricas inversas ... 148
Dominio y rango de las funciones inversas ... 149
Ecuaciones trigonométricas, Solución de las ecuaciones ... 150
Resolución de triángulos, Triángulos oblicuángulos ... 150
Cálculo de ángulos (fórmula de Briggs), Cálculo de superficies ... 151
Elementos secundarios en la solución de triángulos, Radios ... 152
Radios circunscritos, Radio inscrito o inradio, Radio ex-inscrito ... 152
Cevianas, Altura, Mediana, Bisectriz interior ... 153
Bisectriz exterior, Cuadriláteros convexos, Superficies ... 154
Cuadrilátero inscrito o ciclíco ... 154
Cuadrilátero circunscrito, Polígonos regulares ... 155
Problema de Pothenot-Snellius ... 155

Física ... 156

Definiciones, Ecuaciones dimensionales, Sistema de unidades ... 156
Unidades del sistema absoluto ... 156
Unidades del sistema técnico gravitacional o práctico ... 156
Unidades del sistema internacional de medida “SI”, Unidades suplementarias ... 157
Unidades derivadas ... 157
Convenciones básicas, Vectores, Magnitud, Representación gráfica de un vector ... 158
Suma y resta de vectores, Métodos geométricos ... 158
Método del paralelogramo ... 159
Métodos analíticos, Dirección de la resultante ... 160
Mecánica, Cinemática ... 161
Conceptos, Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) ... 162
Movimiento variado, Aceleración ... 162
Movimiento vertical, Movimiento compuesto, Movimiento parabólico ... 163
Movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.) ... 164
Velocidad o rapidez angular y período ... 164
Movimiento circunferencial uniformemente variado (M.C.U.V.) ... 165
Estática, Fuerza, Resultantes de un sistema de fuerzas ... 165
Condiciones de equilibrio en un cuerpo, Teorema de Lamy ... 167
Diagrama de cuerpo libre (D.C.L) o diagrama libre ... 168
Descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares ... 168
Máquinas simples, Tipo palanca ... 169
Tipo plano inclinado ... 171

Dinámica, Principales conceptos … 172
Segunda ley de Newton, Unidades de fuerza … 173
Rozamiento, fuerza de rozamiento o fricción … 174
Dinámica de rotación o rotación dinámica … 174
Momentos de inercia de algunos sólidos … 175
Centro de gravedad, Teorema de Varignon … 176
Posición del centro de gravedad, Centros de gravedad de figuras grométricas … … … … … … … 177
Trabajo, Potencia y Energía. Trabajo, Unidades de trabajo, … … … … … … … … … … … … … … … 180
Equivalencias de unidades de trabajo, Potencia, Unidades de potencia, Energía … … … … … … 180
Energía potencial (Ep), Energía cinética (Ec) … 181
Trabajo transformado o energía trasnformada, Trabajo en las rotaciones … … … … … … … … … 181
Energía cinética de rotación, Impulso y cantidad de movimiento … … … … … … … … … … … … 182
El movimiento oscilatorio y el péndulo, Péndulo simple … … … … … … … … … … … … … … … 182
Elementos de un péndulo simple, Leyes del péndulo … … … … … … … … … … … … … … … … … 182
Péndulo que bate segundos, Fórmula general del péndulo … … … … … … … … … … … … … … 183
Movimiento armónico simple o movimiento vibratorio armónico … … … … … … … … … … … … 183
Resortes, Fuerzas deformadora: Ley de Hooke … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 184
Velocidad, Aceleración, Período y frecuencia … 184
Cálculo de la velocidad “V”, Cálculo de la aceleración … … … … … … … … … … … … … … … … 184
Velocidad y aceleración máximas, Período y frecuencia … … … … … … … … … … … … … … … 184
Densidad y peso específico, Relación entre densidad y peso específico … … … … … … … … … 185
Estática de los fluídos, Conceptos y definiciones, Presión … … … … … … … … … … … … … … 185
Principio de Pascal, Prensa hidráulica … 185
Principio de la hidrostática, Presión hidrostática … … … … … … … … … … … … … … … … … … 186
Ley fundamental de la hidrostática, Principio de Arquímides … … … … … … … … … … … … … 186
Relación entre el empuje y el peso específico de líquidos, Neumología … … … … … … … … … 187
El calor, Dilatación … 187
Calorimetría, Unidades para medir el calor, Calor específico “Ce” … … … … … … … … … … … 188
Calor sensible “Q” (calor ganado o perdido) … 189
Teorema fundamental de la calorimetría, Capacidad calorífica “Cc” … … … … … … … … … … 189
Temperatura de equlibrio de una mezcla, Temperatura final “tf” … … … … … … … … … … … 189
Cambios de fase, Calores latentes, Transmisión de calor … … … … … … … … … … … … … … 189
Transmisión del calor por conducción, Cantidad de calor trasmitido “Q” … … … … … … … … 190
Trabajo mecánico del calor … 190
Termodinámica, Trabajo realizado por un gas “W” … … … … … … … … … … … … … … … … … … 190
Calor absorbido por un gas “G”, Primera ley de la termodinámica … … … … … … … … … … … 191
Segunda ley de la termodinámica (Rudolf Clausius 1850) … … … … … … … … … … … … … … 191
Electrostática, Primera ley de la electrostática … … … … … … … … … … … … … … … … … … 191
Tabla triboeléctrica, Segunda ley de la electrostática:Ley de Coulomb … … … … … … … … … 191
Primitividad, Unidades eléctricas coulomb “C” … … … … … … … … … … … … … … … … … … 192
Campo eléctrico, Campo de cargas iguales … 193

Campo de cargas distintas, Intensidad del campo eléctrico … … … … … … … … … … … … … … 193
Potencial eléctrico, Diferencia de potencial … 194
Trabajo eléctrico, Capacidad eléctrica … 195
Capacidad de los conductores aislados … 195
Capacidad de uns esfera aislada, Condensadores … … … … … … … … … … … … … … … … … 196
Capacidad de un condensador, Capacidad de un condensador plano … … … … … … … … … … 196
Capacidad de condensador esférico y cilíndrico, Asociación de condensadores … … … … … 197
Energía de un condensador, Electrodinámica … … … … … … … … … … … … … … … … … … 198
Corriente eléctrica, Partes de un ciruito eléctrico … … … … … … … … … … … … … … … … 198
Resistencia de los conductores, Ley de Pouillet, Conductancia … … … … … … … … … … … 199
Asociación de resistencias, En serie … 199
En paralelo, Fuerza electromotriz y resistencia total en un circuito … … … … … … … … … 200
Corrientes derivadas, Ley de Kirchoff, Puente de Wheatstone … … … … … … … … … … … 200
Energía y potencia de la corriente eléctrica, Potencia de la corriente eléctrica … … … … … … 201
Efecto Joule o ley de Joule, Rendimiento de la corriente eléctrica … … … … … … … … … 202
Magnetismo y electromagnetismo, Magnetismo … … … … … … … … … … … … … … … … … 202
Líneas de fuerza de un campo magnético, Leyes magnéticas … … … … … … … … … … … … 202
Intensidad “B” de un punto del campo magnético … … … … … … … … … … … … … … … … 203
Intensidad de campo magnético producida por un polo, Flujo magnético … … … … … … … 203
Densidad magnética “B”, Electromagnetismo … … … … … … … … … … … … … … … … … 204
Efecto Oersted, Regla de la mano derecha (de Ampere), Ley de Biot y Savart … … … … … … 204
Intensidad de campo creada por un conductor circular … … … … … … … … … … … … … 204
Ley de la circulación de Ampere … 205
Bobina, Solenoide anular o toroidal de Rowland … … … … … … … … … … … … … … … … 205
Densidad del flujo inducido “B” a través del núcleo, Efecto Faraday … … … … … … … … 206
Ley de Faraday, Óptica, Velocidad de la luz … … … … … … … … … … … … … … … … … 207
Unidad de intensidad de la luz, Iluminación, Unidad de iluminación “E” … … … … … … … 207
Flujo luminoso “f”, Intensidad luminosa “I”, Flujo de intensidad “f_T” … … … … … … … … 208
Reflexión de la luz … 208
Leyes de la reflexión regular, Espejos, Espejos planos, Espejos esféricos … … … … … … … 209
Elementos de un espejo esférico … 209
Rayos principales, Posición del objeto y la imagen en un espejo cóncavo … … … … … … … 210
Refracción de la luz, Indices de refracción, Leyes de la refracción … … … … … … … … … 212
Ángulo límite y reflexión total “L” … 212
Lámina de caras paralelas, Prisma óptico, Imágenes por refracción … … … … … … … … 213
Lentes, Elementos de las lentes … 214
Rayos principales en las lentes convergentes y divergentes … … … … … … … … … … … 214
Construcción y posición de imágenes de lentes convergentes … … … … … … … … … … 215
Fórmula de Descartes para las lentes, Construcción de la imagen de una lente divergente … … 215
Potencia de un lente, Aumento de la lente … … … … … … … … … … … … … … … … … 215
Lentes gruesas de dos caras de cobertura, Potencia de lentes de contacto … … … … … … 216

Química ... 217

Definiciones, Química, Masa, Materia, Estados o fases de la materia ... 217
Cuerpo, Sustancia, Sistema, Fase, Energía ... 218
Unidades de medida, Unidades de longitud ... 218
Unidades de superficie, Unidades de volumen ... 218
Unidades de masa, Unidades de tiempo ... 219
Equivalencias de unidades SI e inglesas ... 219
Unidades de temperatura, Densidad y peso específico ... 220
Densidad absoluta o densidad, Densidad relativa ... 220
Peso específico, Gravedad específica, Densidad de la mezcla ... 221
Relación entre densidad y peso específico, Presiones, Presión ... 221
Presión hidrostática, Presión neumática o presión de gases ... 222
Teoría atómico molecular, Principales conceptos, Regla de Hund ... 223
Tendencia a la máxima simetría, Estructura particular del átomo ... 223
Croquis de un átomo, Núcleo, Isótopos, Isóbaros ... 224
Distribución electrónica de los elementos ... 224
Niveles de energía, Sub-niveles, Números cuánticos ... 224
Conceptos adicionales, Electronegatividad, Afinidad, Valencia, Kerne ... 225
Nomenclatura Lewis ... 225
Enlace íonico, Enlace covalente, Enlace covalente puro, Enlace covalente polar ... 226
Tabla periódica de los elementos ... 227
Grupos principales de la tabla, Nomenclatura ... 228
Nomenclatura química, Nombres de los átomos en su estado iónico ... 229
Aniones, Cationes ... 229
Nombre de los compuestos, Función química ... 230
Nombre de los anhídridos, Nombre de los óxidos, Nombre de los peróxidos ... 231
Nombre de los ácidos, Ácidos hidráticos ... 231
Ácidos oxácidos, Ácidos especiales ... 232
Radicales halogénicos, Radical halogénico hidrácido ... 234
Radical halogénico oxácido, Nombre de la base o hidrócidos ... 234
Nombre de las sales, Sales hidráticas, Sales oxácidas ... 235
Sales dobles, Peculiaridades de los ácidos del fósforo ... 236
Óxidos dobles, Radicales cationes compuestos ... 236
Anfoterismo del cromo, nitrógeno y manganeso ... 237
Unidades químicas de medida, Átomo-Gramo y Molécula-Gramo ... 238
Átomo, Molécula, Átomo-Gramo, Molécula- Gramo o Mol, El estado gaseoso, Gas ... 238
Ley general de los gases, Ley de Boyle y Mariotte, Ley de Charles, Ley de Gay-Lusasac ... 239

Densidad de un gas, Ley de difusión o ley de Graham, Ecuación universal de los gases … … … 240
Hipótesis de Avogrado y Ampere, Mezcla de gases, Leyes de Dalton … … … … … … … … … … 241
Ley de Amagat, Fracción molar, Gases húmedos, Gas húmedo … … … … … … … … … … … … 242
Humedad relativa, Determinación de pesos atómicos, Método del calor específico … … … … 243
Ley de la combinación equivalente de los elementos … … … … … … … … … … … … … … … 244
Leyes de las combinaciones químicas, Leyes ponderales, Leyes volumétricas … … … … … … 244
El estado líquido, Soluciones, Formas de expresar la concentración, Formas físicas … … … … 245
Equivalente-gramo(Eq-g)de compuestos, Mili-valente … … … … … … … … … … … … … … 246
Formas químicas para medir la concentración de las soluciones, Molaridad … … … … … … 246
Molaridad, Normalidad, Dilución y aumento de la concentración … … … … … … … … … … 247
Determinación de pesos moleculares, Método gasométrico, Método osmótico … … … … … … 248
Método ebulloscópico, Método crioscópico, Termoquímica, Definición y conceptos … … … … 249
Ley de Hess, Definición de las unidades calorimétricas, Caloría … … … … … … … … … … 250
Equilibrio químico, Reacciones reversibles … … … … … … … … … … … … … … … … … 250
Reacciones irreversibles, Ácidos y bases, Ácidos … … … … … … … … … … … … … … … 251
Bases, Constante de ionización del agua(Kw), Tipo de soluciones, Concepto de “pH” … … … 252
Electro-química, Unidad de masa, Coulomb, Faraday, Electro-equivalente … … … … … … … 253
Unidades de intesidad, Ampere, Electrólisis, Leyes de Faraday … … … … … … … … … … 253
Química orgánica, Breves nociones y nomenclatura … … … … … … … … … … … … … … 254
División de la química orgánica, Serie acíclica, Funciones químicas … … … … … … … … 255
Función hidrocarburo, Funciones principales, Serie saturada o Alkana … … … … … … … … 256
Serie no saturada … 257
Funciones fundamentales, Función alcohol … … … … … … … … … … … … … … … … … 258
Función aldehído, Función cetona … 259
Función ácido … 260
Radicales orgánicos … 261
Funciones especiales, Función éter, Función éster, Función sal orgánica … … … … … … … 262
Función amina, Función amida … 263
Función nitrilo, Función cianuro … 264
Cuadro de los grupos funcionales … 265
Serie cíclica, Serie alicíclica, Serie heterocíclica, Benceno … … … … … … … … … … … … 267
Radical fenilo, Derivados del benceno … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 268
Naftaleno … 269
Radical naftil, Derivados del naftaleno … … … … … … … … … … … … … … … … … … … 269
Antraceno, Radical antracil … 270
Derivados del antraceno … 271

ARITMÉTICA

DEFINICIÓN

Es aquella parte de la matemática pura elemental que se ocupa de la composición y descomposición de la cantidad expresada en números.

Lógica Matemática

DEFINICIÓN

La lógica es la ciencia que estudia los procedimientos para distinguir si un razonamiento es correcto o incorrecto; en este sentido, la LÓGICA MATEMÁTICA analiza los tipos de razonamiento utilizando modelos matemáticos con ayuda de las PROPOSICIONES LÓGICAS.

PROPOSICIONES LÓGICAS

Una proposición lógica es el conjunto de palabras que, encerrando un pensamiento, tiene sentido al AFIRMAR que es VERDADERO o al AFIRMAR que es falso.

Las proposiciones se calsifican en:

1) Simples o Atómicas

2) Compuestas o Moleculares

CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos son símbolos que sirven para relacionar o juntar proposiciones simples (atómicas) y formar proposiciones compuestas (moleculares).

CONECTIVO	NOMBRE	EL LENGUAJE COMÚN SE LEE
$\sim$	Negación	no, n es cierto que, no es el caso que, etc.
$\wedge$ ó $\bullet$	Conjunción	y, pero, sin embargo, además, aunque, etc.
$\vee$	Disyunción inclusiva	o, y/o

CONECTIVO	NOMBRE	EL LENGUAJE COMÚN SE LEE
Δ	Disyunción exclusiva	o … o…
$\Rightarrow$	Condiciona	entonces, si … entonces …, dado que … … siempre que …, en vista que …, implica …, etc.
$\Leftrightarrow$	Bicondicional	… si y sólo si …

PROPOSICIONES SIMPLES

Las proposiciones simples o atómicas se representan por las letras p, q, r, s, t, etc. y pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplos:

p: Juan Estudia

q: Andrés es un niño

r: Stéfano no juega fútbol

s: Alejandra está gordita

t: Christian es rubio

u: Alescia habla mucho

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

Son las siguientes, formadas a partir de proposiciones simples:

Negación: $\sim p$ Se lee:

"no p", "no es cierto que p", etc.

Conjunción: $p \wedge q$ Se lee:

"p y q", "p pero q", "p sin embargo q", etc.

Disyunción: $p \vee q$ Se lee:

"p o q" , "p y/o q"

Disyunción Exclusiva: $p \Delta q$ Se lee:

"o p o q"

Condicional: $p \Rightarrow q$ Se lee:

"si p, entonces q", "p implica q", etc.

Bicondicional $p \Leftrightarrow q$ Se lee:

"p si, y sólo si q"

TABLAS DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

NEGACIÒN

p	~ q
V	F
F	V

CONJUNCIÒN

p q	p ∧ q
V V	V
VF	F
FV	F
FF	F

DISYUNCIÓN INCLUSIVA

p q	p ∨ q
VV	V
VF	V
FV	V
FF	F

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

p q	p Δ q
V V	F
VF	V
FV	V
FF	F

CONDICIONAL

p q	p ⇒ q
VV	V
VF	F
FV	V
FF	V

BICONDICIONAL

p q	p ⇔ q
V V	V
VF	F
FV	F
FF	V

TIPOS DE PROPOSICIONES

TAUTOLOGÍA

Es una proposición cuyos VALORES DE VERDAD del OPERADOR PRINCIPAL son TODOS VERDADEROS, cualquiera sea el valor de verdad de sus componentes.

Ejemplo:

p q	p ∧ q	⇒	(p ∨ q)
VV	V	V	V
VF	F	V	V
FV	F	V	V
FF	F	V	F

CONTRADICCIÓN

Es una proposición cuyos VALORES DE VERDAD del OPERADOR PRINCIPAL son TODOS FALSOS, cualquiera que sea el valor de verdad de sus componentes.

Ejemplo:

p q	[~ p	⇒	(q	∧	~ q)]	∧	~ p
VV	F	V	V	F	F	F	F
VF	F	V	F	F	V	F	F
FV	V	F	V	F	F	F	V
FF	V	F	F	F	V	F	V

CONTINGENCIA

No es ni tautología ni contradicción porque los VALORES DE VERDAD de su OPERADOR PRINCIPAL tienen por lo menos una VERDAD y/o una FALSEDAD.

LEYES LÒGICAS PRINCIPALES

1. DE IDENTIDAD:

$$p \Rightarrow p$$
$$p \Leftrightarrow p$$

"Una proposición sólo es idéntica consigo misma".

2. DE CONTRADICCIÓN:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

"Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez".

3. DEL TERCIO EXCLUÍDO:

$$p \vee \sim q$$

"Una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera opción".

4. DE LA DOBLE NEGACIÒN (INVOLUCIÓN):

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

"La negación de la negación es una afirmación".

5. DE LA IDEMPOTENCIA:

a) $p \wedge p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \vee p \vee \ldots \vee p \equiv p$

"Las variables repetidas redundantemente en una cadena de conjunciones o en una cadena de disyunciones se reemplazan por la sola variable".

6. DE LA CONMUTATIVIDAD:

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

b) $p \vee q \equiv q \vee p$

c) $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

"En una proposición, la conjunción, la disyunción inclusiva y la bicondicional son conmutativas".

7. DE LA ASOCIATIVIDAD:

a) $p \wedge (q \wedge s) \equiv (p \wedge q) \wedge s$

b) $p \vee (q \vee s) \equiv (p \vee q) \vee s$

c) $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow s) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow s$

"En una proposición, la doble conjunción, la doble disyunción, o la doble bicondicional se asocian indistintamente".

8. DE LA DISTRIBUTIVIDAD:

a) $p \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

b) $p \vee (q \wedge s) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

c) $p \Rightarrow (q \wedge s) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)$

d) $p \Rightarrow (q \vee s) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow s)$

"En una proposición la conjunción, la disyunción y la implicación son distributivas".

9. DE DE MORGAN:

a) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

b) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

"En una proposición, la negación de una conjunción o de una disyunción son distributivas respecto a la disyunción o conjunción.

10. DEL CONDICIONAL:

a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

"En una proposición, la condicional equivale a la disyunción de la negación del antecedente con el consecuente, y la negación de una condicional equivale a una conjunción del antecedente con la negación del consecuente".

11. DEL BICONDICIONAL:

a) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \Delta q)$

12. DE LA ABSORCIÓN:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

13. DE TRANSPOSICIÓN:

a) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

14. DE EXPORTACIÓN:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$

b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow s$

$\equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \Rightarrow (Pn \Rightarrow s)$

15. MODUS PONENS:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

"En una premisa condicional; si se afirma el antecedente, entonces se concluye en la afirmación del consecuente".

16. MODUS TOLLENS:

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim p$

"En una proposición, si se niega el consecuente de una premisa condicional entonces se concluye en la negación del antecedente".

17. DEL SILOGISMO DISYUNTIVO:

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

"En una proposición, cuando se niega el antecedente de la premisa de una disyunción, se concluye en la afirmación del consecuente".

18. DE LA INFERENCIA EQUIVALENTE:

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

"En una proposición, cuando se afirma que uno de los miembros de una bicondicional es verdadera, entonces el otro miembro también es verdadero".

19. DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow (p \Rightarrow s)$

"En una proposición, el condicional es transitivo".

20. DE LA TRANSITIVIDAD SIMÉTRICA:

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow s)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow s)$

"En una proposición, el bicondicional es transitivo".

21. DE LA SIMPLIFICACIÓN:

$(p \wedge q) \Rightarrow p$

"En una proposición, si el antecedente y consecuente de una conjunción son verdades, entonces cualquiera de los dos términos es verdad".

22. DE ADICIÓN:

$p \Rightarrow (p \vee q)$

"En una proposición, una disyunción está implicada por cualquiera de sus dos miembros.

TEORÍA DE CONJUNTOS

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Se entiende por conjunto a la colección, agrupación o reunión de un todo único de objetos definidos, distinguiles por nuestra percepción o nuestro pensamiento y a los cuales se les llama **elementos**. Ejemplo: los muebles de una casa. Los muebles son los elementos que forma el conjunto.

FORMAS DE EXPRESAR UN CONJUNTO

a) Por extensión.- Cuando el conjunto indica explícitamente los elementos del conjunto. También se llama forma constructiva.

Ejemplos:

i) A = {a, b, c, d}

ii) $\mathbb{Z}$ = {… ; -3; -2; -1; -0; 1; 2; … }

b) Por comprensión.- Cuando los elementos del conjunto pueden expresarse por una propiedad común a todos ellos. También se le llama forma simbólica.

Ejemplos:

i) M = {x/x = vocal }

Se lee:

"M es el conjunto de las x, donde x es una vocal".

ii) B = {x e $\mathbb{Z}$ / -2 < x < 3}

Se lee:

"B es el conjunto de las x que pertenecen a los números enteros, donde x es mayor que -2 pero menor que 3".

PRINCIPALES SÍMBOLOS

Símbolo	Lectura	Símbolo	Lectura
$\in$	… pertenece…	$\exists$	existe…
$\notin$	… no pertenece…	$\exists!$	existe un … sólo un …
ϕ	Conjunto vacío	$\nexists$	no existe
$\equiv$	… equivalente…	η	cardinal de…
$\neq$	… diferente…	$\Rightarrow$	implica; entonces…
$\subset$	… está incluido	$\Leftrightarrow$	… si y sólo si…
$\subseteq$	… está incluido estrictamente	$\mathcal{S}$	conjunto de partes de…
$\not\subset$	… no está incluido…	P	potencial del …
$\cup$	… unión…	$\wedge$	… y …
$\cap$	… intersección…	$\vee$	… o …
/	… tal que …	$\triangle$	o … o …
$\sim$	… es coordinable…	A'	Complemento de A con Respecto al conjunto Universal $\mathbb{U}$
$\nsim$	… no es coordinable…	<	… es menor que …
$\mathbb{U}$	Conjunto Universal	>	… es mayor que …
Δ	… diferencia simétrica…	$\leq$	… es menor o igual que …
$\forall$	Para todo	$\geq$	… es mayor o igual que …

NOTACIÓN DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

$\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4;\ldots\}$$

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números entero

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

$\mathbb{Z}^+$: Conjunto de los números enteros positivos

$\mathbb{Z}^-$: Conjunto de los números enteros negativos

$\mathbb{Z}^*$: Conjunto de los números enteros no nulos

$\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales (decimales finitos o infinitos periódicos)

$$\mathbb{Q} = \left\{x/x = \frac{a}{b}\ ;\ a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\ldots; \frac{5}{8}; \frac{7}{2}; -8; +3; -\frac{6}{5}; \ldots\right\}$$

$\mathbb{I}$: Conjunto de números irracionales (decimales infinitos no periódicos)

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}' = \{x/x \text{ es número no racional}\}$$

$$\mathbb{I} = \left\{\ldots; \sqrt{30}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; +e; \pi; \ldots\right\}$$

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\}$$

$$\mathbb{R} = \left\{\ldots; \frac{8}{3}; -\frac{4}{13}; \sqrt{5}; 3; -\sqrt{\frac{5}{4}}; \ldots\right\}$$

$\mathbb{C}$: Conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{\mathbb{R} \wedge \sim \mathbb{R}\}$$

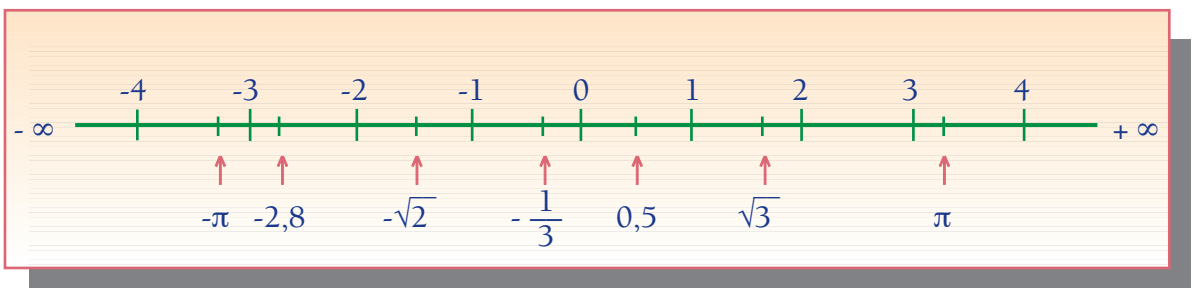
$$\mathbb{C} = \left\{\ldots; -8; \sqrt{7}; 3; 5i; i\sqrt{3}; -\frac{5}{9}; \ldots\right\}$$

LA RECTA REAL

El conjunto de los números reales está formado por todos los conjuntos numéricos. Todos los números:

Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales se pueden representar sobre una recta, desde el cero a + ∞ y desde cero a - ∞ . A esta recta se le llama "Recta real" o "Recta numérica".

Cualquier número real se puede representar sobre un punto de la Recta Real, porque tiene infinitos puntos.



CARACTERÍSTICAS DE LOS CONJUNTOS

1) PERTENENCIA $\in$ Y NO PERTENENCIA "$\notin$"

Sea : A = {a, b, c, d, e }

: B = {a, b, c }

: C = {m, n, q, r, s }

Entonces: $B \in A$, se lee:

"B pertenece a A"

$C \notin A$, se lee:

"C no pertenece a A"

2) CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Finitos:

Cuando los elementos del conjunto se puede contar.

A = {m, n, q, r };

Son 4 elementos.

Infinitos:

Cuando los elementos del conjunto son tantos que no se puede contar.

M = {estrellas del firmamento}; son infinitas

N = {0; 1; 2; 3; 4; 5; …; ∞};Infinitos números

3) CONJUNTOS IGUALES

Dos conjuntos son iguales cuando tienen exactamente los mismos elementos aunque no estén en el mismo orden.

A = {4; 5; 6; 7; 8}

B = {5; 6; 4; 8; 7}

Entonces: A = B

4) CONJUNTO VACÍO

Es el conjunto que carece de elementos.

$A = \phi$; A = { } ; A = 0

5) CONJUNTO UNITARIO

Es el conjunto que tiene un solo elemento.

M = {3} ; Q = {0}

X = {y/2y = 4 }

6) CONJUNTO UNIVERSAL

Es el conjunto que contiene a todos los elementos de otro conjunto.

$\mathbb{U}$ = {todas las vocales}

A = { e; i ; o }

Entonces $\mathbb{U}$ es el conjunto universal de A.

7) SUBCONJUNTO

A = { m; n; p }

B = { q; m; n; r; p}

Se lee " A es subconjunto de B" o "A está incluido en B".

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

CONJUNTO DE CONJUNTO O CONJUNTO DE PARTES

Es el conjunto formado por la totalidad de subconjuntos que se puede formar a partir de un conjunto dado.

Sea el conjunto:

M = { m; n; p }

El conjunto de partes es:

$\mathcal{S}$ (M) = {ϕ ,{m}, {n}, {p}, {m, n}, {m, p}, {n, p}, {m, n, p}}

POTENCIA DE UN CONJUNTO

Expresa el número de subconjuntos que se puede formar con los elementos de un conjunto. En otras palabras, es el número de elementos de un conjunto de partes.

$P(M) = 2^n$

N = número de elementos del conjunto M.

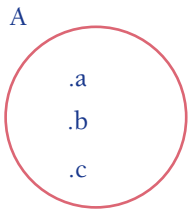
Para el ejemplo anterior:

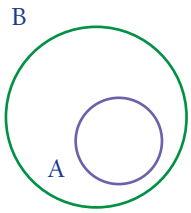
n = 3, luego:

$P(M) = 2^3 = 8$

DIAGRAMAS DE VENN

Son gráficos, generalmente círculos, que sirven para encerrar y representar conjuntos:





A = {a, b, c}
Conjunto A

A ⊂ B
"A está incluído en B"

A ⊄ B
"A no está incluido en B"

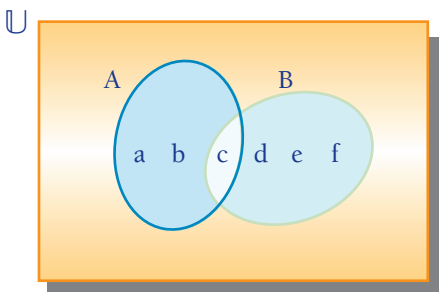
OPERACIONES CON CONJUNTOS

1) UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por todos los elementos de los conjuntos A y B.

Sean: A = { a, b, c }

B = { c, d, e, f }



A ∪ B = { a, b, c, d, f }

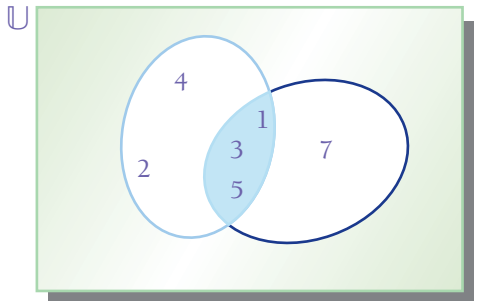
Se lee: "A unión B".

2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de los conjuntos A y B, es el conjunto que contiene elementos comunes a los conjuntos A y B.

Sean: A = { 1; 2; 3; 4; 5 }

B = { 1; 3; 5; 7 }



A ∩ B = { 1; 3; 5 }

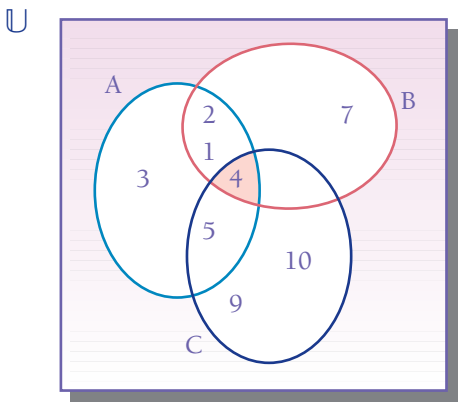
Se lee: "A intersección B".

La intersección de varios conjuntos:

Sean: A = { 1; 2; 3; 4; 5 }

B = { 1; 2; 4; 7}

C = { 4; 5; 9; 10 }



A ∩ B ∩ C = {4}

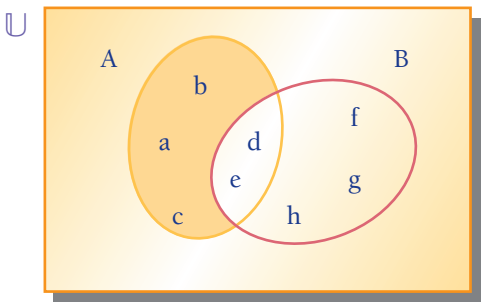
Se lee "A intersección B intersección C".

3) DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia de dos conjuntos, A menos B, es el conjunto formado por elementos de A que no pertenezcan a B.

Sean: A = { a, b, c, d, e }

B = { d, e, f, g, h }



A - B = { a, b, c }

Se lee: "El conjunto A menos el conjunto B, es el conjunto a, b, c".

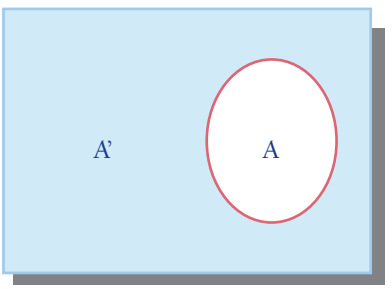
4) COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sean los conjuntos A y universal U. El complemento del conjunto A es la parte del conjunto universal U que no pertenece al conjunto A.

Sean:

A = { vocales }

U = { el alfabeto }



A' = U - A = { las consonantes }

Se lee: "A' es el complemento de A".

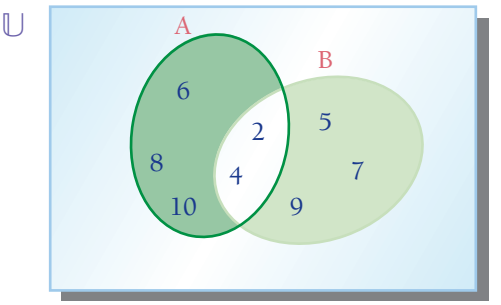
5) DIFERENCIA SIMÉTRICA

Es el conjunto formado por la parte no común de dos conjuntos.

A = { 2; 4; 6; 8; 10 }

B = { 2; 4; 5; 7; 9 }

A Δ B = (A ∪ B) - (A ∩ B)



A Δ B = { 5; 6; 7; 8; 9; 10 }

Se lee: "A diferencia simétrica B"

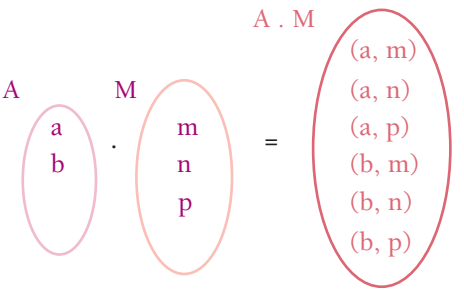
PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano A . B, al conjunto de "pares ordenados" formados por todos los elementos de A, como primeros componentes, asociados a todos los elementos de B como segundos elementos.

Sean:

A = { a, b }

M = { m, n, p }



A . M = { (a, m), (a, n), (a, p), (b, m), (b, n), (b, p)}

Simbólicamente:

A . M = {(x, y)/x ∈ A ∧ y ∈ M}

Nota: A . M ≠ M . A (no es conmutativo)

RELACIONES

DEFINICIÓN

Relación es un subconjunto de pares ordenados de dos conjuntos A y B que obedecen a una proposición establecida.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$$A = \{ a, b \}$$

$$M = \{ m, n, p\}$$

Se denota:

$$a \ \Re \ m \ \text{ ó } \ (a, m) \in \Re$$

y se lee:

" a está relacionada con m por $\Re$".

Simbólicamente:

$\Re$ es una relación de A en M $\Leftrightarrow$ R $\subset$ A . M

y se lee:

"$\Re$ es una relación de A en M, si y solamente si la relación $\Re$ es un subconjunto de A . M".

Ejemplo: A = { 2; 4; 6; 8; 10 }

B = { 1; 2; 3; 4 }

Sea la propiedad: $x \in A \ \wedge \ y \in B$

Que obedezca a la proposición P(x): $x < y$

entonces:

$$2 \ \Re \ 3$$

$$2 \ \Re \ 4$$

Sólo se puede escribir estas dos relaciones porque son las únicas que cumplen que $x < y$, que es la proposición P(x) que los relaciona.

DOMINIO Y RANGO

DOMINIO

Es el conjunto formado por los primeros componentes de los pares ordenados que forman la relación $\Re$.

Se denota: Dom ($\Re$)

En el ejemplo anterior:

$$\text{Dom } (\Re) = \{2\}$$

RANGO

Es el conjunto formado por los segundos componentes de los pares ordenados que forman la relación $\Re$.

Se denota: Ran ($\Re$)

En el ejemplo anterior:

Ran ($\Re$) = { 3; 4}

TIPOS DE RELACIONES EN UN CONJUNTO

1) REFLEXIVA

Cuando todos los elementos de un conjunto A están relacionados consigo mismos a través de $\Re$.

$$\Re \text{ es reflexiva } \Leftrightarrow (a, a) \in \forall \ \Re \quad a \in A$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c\}$$

Relación Reflexiva:

$$\Re = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$$

2) SIMÉTRICA

Cuando cada uno de los elementos de un conjunto A está relacionado con otro del mismo conjunto y éste a su vez está relacionado con el primero.

$$\Re \text{ es simétrica} \Leftrightarrow (a, b) \in \Re \Rightarrow (b, a) \in \Re$$

Ejemplo:

$$A = \{a, b, c\}$$

Relación simétrica:

$$\Re = \{(a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (b, c); (c, b)\}$$

3) TRANSITIVA

Cuando un elemento de un conjunto A está relacionado con otro elemento del mismo conjunto y esté a su vez está relacionado con uno tercero del mismo conjunto; entonces, el primero está relacionado con el tercero a través de la relación R.

$$\Re \text{ es transitiva } \Leftrightarrow (a, b) \in \Re \wedge (b, c) \in \Re$$
$$\Rightarrow (a, c) \in \Re$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c \}$$

Relación Transitiva:

$$\Re = \{(a, b); (b, c); (a, c)\}$$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

La relación $\Re$ de A en A es una relación de EQUIVALENCIA, cuando esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

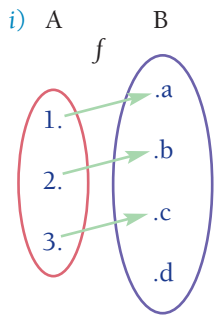
FUNCIONES

DEFINICIÓN

Una función de A en B es una relación de par ordenado que asocia a TODO ELEMENTO del conjunto A con UN SOLO ELEMENTO del conjunto B.

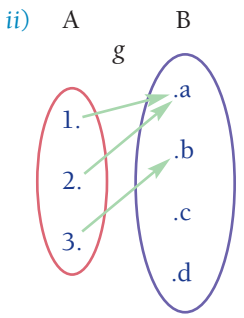
Se denota: $f : A \Rightarrow B$

Ejemplos:



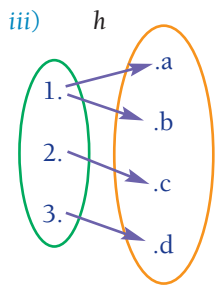
f es una función y se denota

$f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

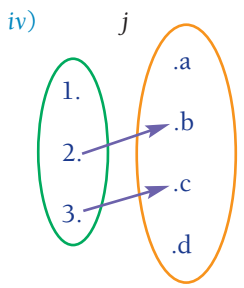


g es una función y se denota

$g = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$



h No es una función porque No cumple: "a todo elemento de A le corresponde UN SOLO elemento de B"

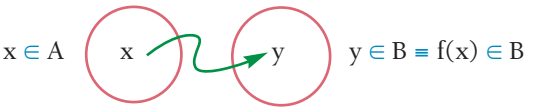


j NO es una función porque No cumple: "a TODO elemento de A

En general una función de denota así:

$$f(x) = y$$

Donde "x" es un elemento de A, e "y" es un elemento de B.



DOMINIO Y RANGO

DOMINIO

Es el conjunto de todas las PRIMERAS componentes del par ordenado que pertenecen a una función "*f*".

RANGO

Es el conjunto de todas las SEGUNDAS componentes del par ordenado que pertenecen a una función "*f*".

Ejemplo:

Sea: $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$$\text{Dom}(f) = \{1; 2; 3\}$$

$$\text{Ran}(f) = \{ a, b, c\}$$

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

NUMERACIÓN

DEFINICIÓN

Es la parte de la Aritmética que estudia las leyes, artificios y convencionalismos utilizados para expresar (hablar) y representar (escribir) a los números en forma sistemática y lo más simple posible.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Se refiere a los conjuntos de reglas, leyes, artificios y convenios que permiten formar, expresar y representar todos los números.

BASE DE UN SISTEMA

Es aquel número que indica la cantidad de unidades de un orden cualquiera que se requiere para formar una unidad de un orden inmediato superior. Así,

nuestro sistema se llama DECIMAL porque con 10 UNIDADES de un orden cualquiera, se logra formar una unidad de un orden inmediato superior.

FORMACIÓN DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

PRINCIPIO BÁSICO

En un sistema de base N, toda cifra escrita un lugar a la izquierda de otra, representa unidades de orden N veces mayor al orden que representa la otra, escrita a la derecha.

Ejemplo:

Sea el número 468 en base N = 10, el 4 es de orden 10 veces mayor que cada unidad de 60 y cada unidad de 6 es de orden 10 veces mayor que cada unidad de 8.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO

Es el procedimiento de cálculo que permite determinar la cantidad de unidades simples que posee un número y con ello su valor real.

Sea el número $\overline{a\,b\,c\,d}$ de base N:

$\overline{a\,b\,c\,d}_{(N)}$

- d → Unidades de 1° orden.
- c → Unidades de 2° orden (N veces las u.s.)
- b → Unidades de 3° orden (N^2 veces las u.s.)
- a → Unidades de 4° orden (N^3 veces las u.s.)

Donde: u.s. = unidades simples

MÉTODO PRÁCTICO PARA DESCOMPONER UN NÚMERO EN SU FORMA POLINÓMICA

"Se toma la primera cifra de la izquierda y se multiplica por la base del sistema elevado a un exponente igual al número de cifras que le siguen a la cifra tomada, a este resultado se le suma el producto de la segunda cifra multiplicada por la base del sistema elevada a un exponente igual al número de cifras que le siguen y así sucesivamente".

$$\overline{a\,b\,c}_{(N)} \Rightarrow a \,.\, N^2 + b \,.\, N + c$$

$$\overline{a\,b\,c\,d\,e}_{(N)} \Rightarrow a \,.\, N^4 + b \,.\, N^3 + c \,.\, N^2 + d \,.\, N + e$$

$$\overline{\underbrace{ab\ldots xyz}_{\text{“m” cifras}}}_{(N)} \Rightarrow a \,.\, N^{m-1} + b \,.\, N^{m-2} + \ldots x \,.\, N^2 + y\,N + z$$

CONVENCIÓN

Cuando la base es superior a 10, y los números 10; 11; 12 y 13 sean cifras, se emplea la siguiente equivalencia:

$$\alpha = 10 \;;\; \beta = 11 \;;\; \gamma = 12 \;;\; \& = 13$$

CIFRAS MÍNIMAS

Son todas las cifras menores o iguales a la mitad de la base del número dado.

Ejemplos de cifras mínimas:

De base 4:	0;	1;	2;				
De base 7:	0;	1;	2;	3;			
De base 10:	0;	1;	2;	3;	4,	5	
De base 11:	0;	1;	2;	3,	4;	5	
De base 12:	0;	1;	2;	3,	4;	5;	6

Ejemplo:

Escribir el número $67\,654_{(8)}$ en cifras mínimas. Las cifras mínimas de este número son: 0; 1; 2; 3; 4.

$4 = 4$

$5 - 8 = \overline{3}$

$6 + 1 = 7$; $7 - 8 = \overline{1}$

$7 + 1 = 8$; $8 - 8 = 0$

$6 + 1 = 7$; $7 - 8 = \overline{1}$

$0 + 1 = 1$

$$\therefore \quad 67\,654_{(8)} = 1\,\overline{1}\,0\,\overline{1}\,\overline{3}\,4$$

OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS NO DECIMALES

SUMA

Tal como en el sistema decimal, si la suma parcial supera el valor de la base, se ecribe el valor numérico de lo que excede a la base y se lleva como unidades tantas veces como excede al valor de la base.

Ejemplo:

$$423_{(7)} + 566_{(7)} + 2521_{(7)}$$

$$\begin{array}{r} 4\,2\,3\ + \\ 5\,6\,6 \\ 2\,5\,2\,1 \\ \hline 4\,1\,4\,3_{(7)} \end{array}$$

lo cual se desarrolló de la siguiente manera:

$$3 + 6 + 1 = 10$$

como 10 = 7 + 3; se pone 3 y se lleva 1.

$$1 + 2 + 6 + 2 = 11$$

como 11 = 7 + 4 ; se pone 4, se lleva 1.

$$1 + 4 + 5 + 5 = 15$$

como 15 = 14 + 1; 15 = 2 . 7 + 1; se pone 1, se lleva 2

$$2 + 2 = 4$$

RESTA

El método es similar a la resta en base 10. Cuando la base es otra, se añade como unidad el valor de la base.

Ejemplo: $4\,7\,3\,5_{(8)} - 2\,3\,6\,7_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 4\,7\,3\,5\ - \\ 2\,3\,6\,7_{(8)} \\ \hline 2\,3\,4\,6_{(8)} \end{array}$$

Desarrollo:

5 - 7 no se puede restar, entonces, en la segunda columna tomamos prestada 1 unidad a 3, lo que nos permite añadir a 5 el valor de la base:

$$(5 + 8) - 7 = 6$$

Como a 3 se quitó 1 unidad, ahora es 2, pero 2 - 6 no se puede restar, entonces:

$$(2 + 8) - 6 = 4$$

Como a 7 se le había quitado 1 unidad, ahora es 6:

$$6 - 3 = 3$$

Ahora no se ha quitado nada.

Finalmente:

$$4 - 2 = 2$$

MULTIPLICACIÓN

El procedimiento es similar a la multiplicación en base 10; sólo que lo que se lleva es la unidad de la base de los factores.

Ejemplo:

$$326_{(7)} \,.\, 465_{(7)}$$

$$\begin{array}{r} 3\,2\,6\ \mathrm{x} \\ 4\,6\,5 \\ \hline 2\,3\,0\,2 \\ 2\,6\,3\,1\ \ \\ 1\,6\,4\,3\ \ \ \ \\ \hline 2\,2\,6\,2\,1\,2_{(7)} \end{array}$$

Desarrollo:

5 . 6 = 30 = 4 . 7 + 2	pongo 2 van 4
5 . 2 + 4 = 14 = 2 . 7 + 0	pongo 0 van 2
5 . 3 + 2 = 17 = 2 . 7 + 3	pongo 3 van 2
Finalmente:	pongo 2.
6 . 6 = 36 = 5 . 7 + 1	pongo 1 van 5
6 . 2 + 5 = 17 = 2 . 7 + 3	pongo 3 van 2
6 . 3 + 2 = 20 = 2 . 7 + 6	pongo 6 van 2
Finalmente:	pongo 2
4 . 6 = 24 = 3 . 7 + 3	pongo 3 van 3
4 . 2 + 3 = 11 = 1 . 7 + 4	pongo 4 van 1
4 . 3 + 1 = 13 = 1 . 7 + 6	pongo 6 van 1
Finalmente:	pongo 1

Luego, se suma los productos parciales, recordando cómo se suma cuando los sumandos no son de base 10.

DIVISIÓN

Para hacer la división es aconsejable formar una tabla con la base dada, con todos los productos posibles del divisor por el cociente.

Ejemplo: $4\,350_{(6)} \div 24_{(6)}$

Las cifras del cociente, por ser de base 6, oscilan entre 0 y 5, lo cual se toma en cuenta para formar la tabla:

Tabla de base 6

0 . 24	=	0
1 . 24	=	24
2 . 24	=	52
3 . 24	=	120
4 . 24	=	144
5 . 24	=	212

```
4 3 5 0   | 2 4
2 4       |-------
-------   | 1 4 2(6)
1 5 5
1 4 4
-------
  1 1 0
    5 2
-------
    1 4
```

CAMBIOS DE BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

1° UN NÚMERO DE CUALQUIER BASE PASAR A BASE 10

Regla:

Se descompone polinómicamente el número dado. El número que resulta de sumar las unidades simples (u.s.) de este número es el número de base 10.

Ejemplo:

Pasar $3\,856_{(9)}$ a base 10.

Se descompone polinómicamente y se suma:

$$3 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + 6 = 2\,886 \text{ u. s.}$$

$$3\,856_{(9)} = 2\,886_{(10)} = 2\,886$$

Nota.-
Que cuando el número es de base 10 no es necesario señalar la base.

2° UN NÚMERO DE BASE 10 PASAR A OTRO SISTEMA DE BASE "N"

Regla:

Se divide el número dado entre el valor "N" de la base deseada, lo cual arroja un cociente. Este cociente se divide nuevamente entre el valor "N", sucesivamente hasta obtener un último cociente cuyo valor sea menor a la base. Luego, tomando la cifra del último cociente y las cifras de los residuos en el orden del último al primero, queda formado el número de base "N".

Ejemplo:

Pasar 4 975 de base 10 a base 8.

```
4 9 7 5   | 8
  1 7     | 6 2 1 | 8
    1 5     6 1   | 7 7 | 8
  (7) <-- (5) <-- (5)   9 | 8
                    (1) <-- (1)
```

$\therefore \quad 4\,975_{(10)} = 11\,557_{(8)}$

3° DE UN NÚMERO NO DECIMAL A OTRO NO DECIMAL

Regla:

El primero se pasa a base 10 y luego, el nuevo número, a la base pedida.

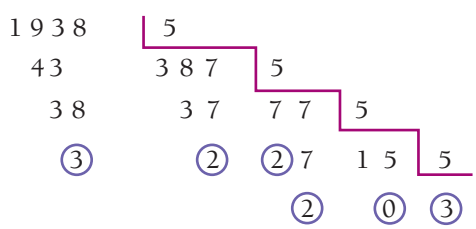
Ejemplo:

Pasar el número $2\,583_{(9)}$ a base 5.

A base 10:

$$2 \cdot 9^3 + 5 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + 3 = 1\,938$$

Ahora, 1 938 se cambia a base 5:



$\therefore \qquad 2\,583_{(9)} = 30\,223_{(5)}$

CONTEO DE CIFRAS AL ESCRIBIR LA SERIE NATURAL

EN BASE 10

> # de cifras = (# mayor + 1) (# cifras del # mayor) – (número con tantos 1 como cifras tenga el # mayor)

Ejemplos:

¿Cuántas cifras se emplea para escribir la serie natural de los números hasta el 3 475?

Solución:

de cifras = (3 475 + 1) (4) – (1 111)

de cifras = 3 4 76 . 4 – 1 111

de cifras = 13 904 – 1 111 = 12 793

¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir la serie natural de los números hasta 15 497?

Solución:

de cifras = (15 497 + 1) (5) – 11 111

de cifras = 15 498 . 5 – 11 111

de cifras = 66 379

EN BASE N:

> # de cifras = (# mayor + 1)(# cifras del # mayor) - $\left[\dfrac{n^k - 1}{n - 1}\right]$

k = # de cifras del número mayor

n = base del sistema

Ejemplo:

¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir hasta el número $8\,427_{(9)}$?

Solución:

$$8\,427_{(9)} = 6\,181$$

$$\text{\# de cifras} = \left[(6\,181 + 1) \,.\, 4 - \frac{9^4 - 1}{9 - 1}\right]$$

de cifrras = 23 908

CÁLCULO DE LA CANTIDAD DE NÚMEROS DE "n" CIFRAS, EN BASE "A"

Consiste en darle a cada cifra el número de valores que puede asumir. El producto de estos valores nos dá el número de combinaciones que a su vez es el número de números de "n" cifras.

> # de números = (base – 1)(base - 1)$^{(n-1)}$

Observar que:

"n" es el número de ciras, pero cuando las cifra se repiten, esa cifra se toma una sola vez.

Ejemplo:

¿Cuántos números de la forma $\overline{a\,b\,b}_{(12)}$ existen?

Solución: $\overline{a\,b\,b}$

Tiene 1 cifra repetida y distinta a la primera cifra.

Por lo tanto:

$$\text{\# de cifras} = (12 - 1)\,(12 - 1)^{(2-1)} = 121$$

SUMATORIA DE PRIMEROS NÚMEROS DE LA SERIA NATURAL EN BASE 10

1) Suma de los "n" primeros números consecutivos de la serie natural.

$$S_C = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

$$\boxed{S_C = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

2) Suma de los "n" primeros números impares consecutivos de la serie natural de los números.

$$S_i = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

$$\boxed{S_i = n^2}$$

3) Suma de los "n" primeros números pares consecutivos de la serie natural de los números.

$$S_p = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2n - 4) + (2n - 2) + 2n$$

$$\boxed{S_p = n(n + 1)}$$

OPERACIONES BÁSICAS SOBRE NÚMEROS REALES

SUMA O ADICIÓN

1) LEY CONMUTATIVA

En una suma, el orden de los sumandos no altera la suma total. Así:

$$a + b + c = c + a + b = S$$

Ejemplo:

$$4 + 9 + 12 = 12 + 4 + 9 = 25$$

2) LEY ASOCIATIVA

En una suma de varios sumandos, dos o más de ellos pueden ser sustituidos por su suma parcial y la suma total no se altera.

$$a + b + c = (a + b) + c = S$$

Ejemplo:

$$6 + 8 + 3 + 11 = 14 + 3 + 11 = 28$$

3) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se suma miembro a miembro dos o más igualdades, el resultado es otra igualdad.

$$\begin{array}{l} a + c = m \\ b + d = n \\ r + p = h \\ \hline S = S \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 + 3 = 8 \\ 6 + 9 = 15 \\ 8 + 10 = 18 \\ \hline 41 = 41 \end{array}$$

4) LEY DE MONOTONÍA

a) Si se suma miembro a miembro igualdades con desigualdades del mismo sentido, el resutlado es una desigualdad cuyo sentido es el mismo que el de las desigualdades.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & 6 = 6 \\ & 5 = 5 \\ & 9 > 4 \\ & 13 > 11 \\ \hline \text{Resultado} & 33 > 26 \end{array}$$

b) Si se suma miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, el resutlado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & 5 < 8 \\ & 6 < 9 \\ & 18 < 60 \\ \hline \text{Resultado} & 29 > 77 \end{array}$$

RESTA O SUSTRACCIÓN

Forma general:

$$\boxed{M - S = D}$$

Donde, los términos son:

M = minuendo
S = sustraendo
D = diferencia

VARIACIONES DE LOS TÉRMINOS DE LA RESTA

1) Si al minuendo se le suma o se le resta un número cualquiera sin alterar el sustraendo, entonces la diferencia queda aumentada o disminuida, respectivamente, en dicha cantidad.

$$\boxed{(M \pm n) - S = D \pm n}$$

2) Si al sustraendo se le suma o se le resta un número cualquiera, sin alterar el minuendo entonces la diferencia queda disminuida o aumentada, respectivamente, en dicha cantidad.

$$\boxed{M - (S \pm n) = D \mp n}$$

3) Si al minuendo y sustraendo se le suma o se le resta un mismo número, la diferencia no se altera.

$$\boxed{(M \pm n) - (S \pm n) = D}$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO "C.A."

C.A. de un número es otro número equivalente a lo que le falta al primero para ser igual a la unidad decimal de orden inmediato superior.

Ejemplo:

C.A. de 0,03 es 0,07 porque 0,1 - 0,03 es 0,07

C.A. de 6 es 4 porque 10 - 6 es 4

C.A. de 367 es 633 porque 1 000 - 367 es 633

LA MULTIPLICACIÓN

1) LEY CONMUTATIVA

El orden de los factores no altera el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a = P$$

Ejemplo:

$$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7 = 28$$

2) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA

El producto de un factor por la suma indicada de dos o más sumandos es giual a la suma de los productos del factor por cada sumando.

$$a(n + m) = a \cdot n + a \cdot m = P$$

Ejemplo:

$$5(8 + 3) = 5 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 55$$

3)LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA RESTA

El producto de un factor por una resta indicada es igual a la diferencia del producto del factor por el minuendo menos el producto del factor por el sustraendo.

$$a(n - m) = a. n - a \cdot m = P$$

Ejemplo:

$$5(8 - 3) = 5 \cdot 8 - 5 \cdot 3 = 25$$

4) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se multiplica miembro a miembro dos igualdades, el resultado es otra igualdad.

$$\begin{array}{c} a = b \\ m = n \\ \hline a \cdot m = b \cdot n \end{array}$$

5) LEY DE MONOTONÍA

Si se multiplica miembro a miembro igualdades con desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & 3 = 3 \\ & 5 > 2 \\ & 3 > 1 \\ \hline \text{Multiplicando} & 45 > 6 \end{array}$$

Si se multiplica miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & 3 < 5 \\ & 8 < 9 \\ & 2 < 7 \\ \hline \text{Multiplicando} & 48 < 315 \end{array}$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL NÚMERO ENTERO

$$10^{n-1} \leq N < 10^{n}$$

N = número entero

n = número de cifras del número

LA DIVISIÓN

Es una operación que consiste en hallar un factor llamado cociente, el cual indica el número de veces que un factor, llamado divisor, está contenido en otro llamado dividendo.

$$D = d \cdot q \Leftrightarrow \frac{D}{d} = q$$

Donde: D = dividendo
d = divisor
q = cociente

Además, cuando la división es inexacta tiene un residuo.

a) División inexacta por defecto:

$$D = d \cdot q + r$$

Donde:

$$R \neq 0 \ , \ \ r < d$$

b) División inexacta por exceso:

$$D = d(q + 1) - r'$$

Donde:

$$r' \neq 0, \ 0 < r' < d$$

1) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se divide miembro a miembro dos igualdades, el resultado es otra igualdad; si las divisiones son exactas.

$$A = B \ \text{ y } \ C = D$$

Luego: $$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

2) LEY DE MONOTONÍA

Si ambos miembros de una desigualdad son divididos por un mismo número que sea divisor de ambos, se obtiene otra desigualdad cuyo sentido es el mismo que la desigualdad dada.

A > B; "d" divisor de ambos $\Rightarrow \frac{A}{d} > \frac{B}{d}$

3) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA

El cociente de una suma indicada dividida por un divisor es igual a la suma de los sumandos divididos cada uno por el divisor común.

$$\frac{a + b + c + m}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + \frac{m}{d} = q$$

4) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA RESTA

El cociente de una resta indicada dividida por un divisor común es igual a la resta de los cocientes resultantes.

$$\frac{a - b}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = q$$

ALTERACIONES DE LOS TÉRMINOS DE UNA DIVISIÓN

1) Alteración del dividendo.-

En una división exacta, si al dividendo se le multiplica o se le divide por un número cualquiera, sin alterar el divisor, entonces el cociente queda multiplicado o dividido, respectivamente, por el mismo número.

Casos:

a) $\frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \cdot n}{d} = q \cdot n$

b) $\frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \div n}{d} = q \div n$

2) Alteración del divisor.-

En una división exacta, si al divisor se le multiplica o se le divide por un número cualquiera, sin alterar el dividendo, entonces el cociente queda dividido o multiplicado respectivamente, por dicho número.

Casos:

a) $\frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D}{d \cdot n} = q \div n$

b) $\frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D}{q \div n} = q \cdot n$

3) Alteración del dividendo y divisor.-

En una división exacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica o divide simultáneamente por un mismo nùmero, el cociente no varía.

Casos:

a) $\frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \cdot n}{q \cdot n} = q$

b) $\frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \div n}{q \div n} = q$

En una división inexacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica o se les divide por el mismo número, el cociente no se altera, pero el residuo queda multiplicado o dividido respectivamente, por el mismo número.

a) $\frac{D}{d} = q + r$; $\frac{D \cdot n}{d \cdot n} = q + r \cdot n$

b) $\frac{D}{d} = q + r$; $\frac{D \div n}{d \div n} = q + r \div n$

PROPIEDADES DEL RESTO O RESIDUO

1° El resto siempre es menor que el dividendo

$$r < d$$

2° El resto siempre debe ser menor que la mitad del dividendo:

$$r < \frac{D}{2}$$

3° El resto máximo siempre será igual al divisor menos uno:

$$r_{máx} = d - 1$$

4° La suma de los valores absolutos de los restos por defecto y por exceso siempre es igual al divisor.

$$|r| + |r'| = d$$

RELACIONES NOTABLES DE LAS CUATRO OPERACIONES

1) Dadas la suma "S" y la diferencia "D" de dos números "a" y "b", donde a > b:

$$a = \frac{S + D}{2} \qquad b = \frac{S - D}{2}$$

2) Dados la suma "S" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde a > b:

$$a = \frac{q \cdot S}{q + 1} \qquad b = \frac{S}{q + 1}$$

3) Dados la suma "S", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números "a" y "b" (a > b).

$$a = \frac{S \cdot q + r}{q + 1} \qquad b = \frac{S - r}{q + 1}$$

4) Dados la diferencia "D" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde a > b.

$$a = \frac{q \cdot D}{q - 1} \qquad b = \frac{D}{q - 1}$$

5) Dados la diferencia "D", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números "a" y "b", donde a > b.

$$a = \frac{D \cdot q - r}{q - 1} \qquad b = \frac{D - r}{q - 1}$$

6) Dados el producto "P" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde a > b

$$a = \sqrt{P \cdot q} \qquad b = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

DIVISIBILIDAD (en Z)

Un número "A" es divisible por otro número "B" solamente si el cociente de dividir "A" por "B" es un número entero "n".

$$\frac{A}{B} = n \Rightarrow A = n \cdot B \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$$

DIVISOR

Es un número que está contenido en otro un número exacto (entero) de veces.

Ejemplo:

$$\{ -8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$$

son todos los divisores de 8.

MULTIPLO

Múltiplo de un número es aquel número que contiene al primero un número (entero) exacto de veces.

Se denota:

$$A = m \cdot B$$

o, también así:

$$A = \overset{\circ}{B}$$

Ejemplos:

$$\{ -16; -8; 8; 16; 24 \}$$

son algunos múltiplos de 8.

PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD

1º Si un número "n" divide a varios otros números, divide también a la suma o a la diferencia de dichos números.

$$\frac{A}{n} = q_1 \quad ; \quad \frac{B}{n} = q_2$$

$$\Rightarrow \frac{A \pm B}{n} = q$$

2º Si un número "n" no divide exactamente a otros dos (A y B), dividirá exactamente a la diferencia de ellos (A - B) si y solamente si los residuos (r_1 y r_2) que resultan de dividir cada número entre el número "n" son iguales.

$$A = n \cdot q_1 \; r_1$$

$$B = n \; q_2 + r_2$$

Restando: $A - B = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$

$$\Leftrightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

3º Si un número "n" divide exactamente a otro número "A", también divide a todo múltiplo de éste.

Si: $\frac{A}{n} = q_1$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot A}{n} = q_2$$

4º Si un número "A" es divisible por otro "n" lo es también por los factores de éste.

Si: $\frac{A}{n} = q$

$$\Rightarrow \frac{A}{n_1} = q_1 \; ; \; \frac{A}{n_2} = q_2 \; ; \; \frac{A}{n_3} = q_3$$

donde: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$

5º En una división inexacta, si un número "n" divide al dividendo "A" y al divisor "d", también divide al residuo "r".

Sea: $\frac{A}{d} = q + r$

Si: $\frac{A}{n} = q_1$ y $\frac{d}{n} = q_2$

Entonces : $\frac{r}{n} = q_3$

REGLAS PRÁCTICAS DE DIVISIBILIDAD

Se dice que un número es divisible:

Por 2, cuando termina en cero o en cifra par.

Por 4, cuando sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 4.

Por 8, cuando sus tres últimas cifras son ceros o múltiplos de 8.

Por 5, cuando su última cifra es cero o cinco.

Por 25, cuando sus dos últimas cifras son ceros o un número múltiplo de 25.

Por 125, cuando sus tres últimas cifras son ceros o múltiplos de 125.

Por 2^n o 5^n, cuando las "n" últimas cifras son ceros o un número múltiplo de 2^n o 5^n.

Por 3, cuando la suma de sus cifras significativas es 3 o múltiplo de 3.

Por 9, cuando la suma de sus cifras significativas es 9 o múltiplo de 9.

Por 11, cuando la suma de las cifras que ocupan lugar impar menos la suma de las cifras que ocupan lugar par es: 0, 11 o múltiplo de 11.

Ejemplo: 538 527 es m11

Lugar par: 5 + 8 + 2 = 15

Lugar impar: 3 + 5 + 7 = 15

$\Rightarrow$15 - 15 = 0

Por 6, cuando los es simultáneamente por 2 y por 3.

Por 22, cuando lo es simultáneamente por 2 y por 11.

Por 7, lo es cuando se verifica el siguiente procedimiento: "Se separa la última cifra significativa de la derecha, esta cifra se duplica y se resta al número que queda a la izquierda, con el resultado se hace lo mismo sucesivamente hasta llegar a un número pequeño tal, que a simple vista se

puede ver si es o no múltiplo de 7; si lo es, el número es divisible entre 7".

Ejemplos:

i) 63 743 no es m7.

$$6\,374 - 2 \,.\, 3 = 6\,368$$

$$636 - 2 \,.\, 8 = 620$$

$$6 - 2 \,.\, 2 = 2$$

$\therefore$ NO es m7, porque: $2 \neq$ m7

ii) 25 795

$$2\,579 - 2 \,.\, 5 = 2\,569$$

$$256 - 2 \,.\, 9 = 238$$

$$23 - 2 \,.\, 8 = 7$$

$\therefore$ SI es m7, porque: 7 = m7

Por 12, cuando lo es simultáneamente por 3 y por 4.

Por 14, cuando lo es simultáneamente por 2 y por 7.

Por 15,cuando lo es simultáneamente por 3 y por 5.

Por 16, cuando las 4 últimas cifra son ceros o el número formado por esta 4 últimas cifras es múltiplo de 16. Corresponde al caso de 2^n, cuando n = 4.

Por 17, cuando la diferencia entre sus decenas y el quíntuple de sus unidades es 17 o m17.

Ejemplo: 2 975

$$297 - 5 \,.\, 5 = 272$$

$$27 - 5 \,.\, 2 = 17$$

$\therefore$ 2 975 = m17

Por 19, cuando la suma de sus decenas con el doble de sus unidades es 19 o m19.

Ejemplos:

i) 4 835 no es m19.

$$483 + 2 \,.\, 5 = 493$$

$$49 + 2 \,.\, 3 = 55 \neq \text{M19}$$

ii) 12 635

$$1\,263 + 2 \,.\, 5 = 1\,273$$

$$127 + 2 \,.\, 3 = 133$$

$$13 + 2 \,.\, 3 = 19 = \text{m19}$$

NÚMEROS CONGRUENTES

Dos números son congruentes respecto de otro número "p", llamado módulo, si al dividir por este módulo originan el mismo resto.

Se denota: $A = p \,.\, a + r$

$B = p \,.\, b + r$

En general: $A \equiv B$ (mod. P)

Ejemplo:

Verificar que los números 50 y 32 son congruentes con el módulo 6.

$$\frac{50}{6} = 8 + 2$$

$$\frac{32}{6} = 5 + 2$$

Notar que la condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto a un módulo, es que su diferencia sea múltipo del módulo.

$$A \equiv B \text{ (mod. p)} \Leftrightarrow A - B = \overset{\circ}{p}$$

Así, del ejemplo anterior:

$$50 - 32 = 18 \wedge 18 = \text{m6}$$

$\therefore$ $50 \equiv 32$ (mod. 2)

NÚMEROS PRIMOS (en $\mathbb{N}$)

CLASIFICACIÓN

1. Primos absolutos o simplemente primos.-

Son aquellos números primos que sólo son divisibles entre la unidad y entre sí mismos.

Ejemplos:

i) 1

ii) 3

iii) 17

iv) 59

2. Primos relativos.-

Son dos o más números que simultáneamente sólo son divisibles entre la unidad, aunque independientemente pueden ser divisibles por otro número diferente de 1.

Ejemplo:

5; 9; 14;

son primos relativos porque no son divisibles entre sí, aun cuando el 9 y el 14 son divisibles por otros números y el 5 es primo absoluto.

NÚMERO COMPUESTO

Es todo número no primo, resultado de multiplicar dos o más números primos absolutos o las potencias de estos.

Ejemplos:

i) $32 = 2^5$

ii) $180 = 2^2 . 3^2 . 5$

iii) $12 = 2^2 . 3$

iv) $33 = 3 . 11$

CRIBA DE ERATÓSTENES

Es una tabla denominada también "Tabla de los Números Primos Absolutos" y permite obtener los primeros números primos.

REGLAS PARA SU CONSTRUCCIÓN

1° Se escribe todos los números en $\mathbb{N}$ desde el 1 hasta el límite pedido.

2° Se tacha los múltiplos de 2, partiendo de 4.

3° El siguiente número no tachado es el 3; en consecuencia, se tacha los múltiplos de 3 , partiendo de 9.

4° Dado que el siguiente número no tachado es el 5, se tacha los múltiplos de 5, partiendo de 25.

5° Así sucesivamente, hasta concluir. Los números que quedan son los primeros números primos absolutos.

Ejemplo:

Hallar los números primos en el rango de los 100 primeros números naturales.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En conclusión:

{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,

47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}

es el conjunto de los números primos en el rango del 1 al 100.

FÓRMULAS GENERALES

Todo número compuesto, como se mencionó, puede ser expresado como el producto de 1 por dos o más factores primos y se pondrá calcular algunos elementos asociados cuyas fórmulas se indica a continuación.

Sea N número un número compuesto:

$$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} . \ldots . w^{\omega}$$

Donde:

a, b, c, …, w = factores primos de N

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ = exponentes de los factores primos de N

NÚMERO DE DIVISORES

1) $n = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\omega + 1)$

n: número de divisores de N

Ejemplo:

$N = 12 = 2^2 \cdot 3^1$

$n = (2 + 1)(1 + 1) = 6$

{1, 2, 3, 4, 6, 12}

SUMA DE DIVISORES

2) $$S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{w^{\omega+1} - 1}{w - 1}$$

S: suma de los divisores de N

SUMA DE INVERSAS DE DIVISORES

3) $$S_i = \frac{S}{N}$$

S_i: suma de la inversa de los divisores de N.

SUMA DE POTENCIAS DE LOS DIVISORES

4) $$S_q = \frac{a^{q(\alpha+1)} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{q(\beta+1)} - 1}{b - 1} \cdots \frac{w^{q(\omega+1)} - 1}{w - 1}$$

S_q: suma de las potencias "q" de los divisores de N

PRODUCTO DE DIVISORES

5) $$P = \sqrt{N^n}$$

P: producto de los divisores de N

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Máximo común divisor de dos números es el mayor divisor común de ellos.

Ejemplo:

Hallar el MCD de los números 36, 48 y 72

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2^2 \cdot 3^3$

sus factores son:

1, 2, 4

3, 6, 12

9, 18, 36

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$48 = 2^4 \cdot 3$

sus factores son:

1, 2, 4, 8, 16,

3, 6, 12, 24, 48

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

sus factores son:

1, 2, 4, 8,

3, 6, 12, 24,

9, 18, 36, 72

Los "divisores comunes" a los números 36, 48 y 72 son: 1, ,2 ,3 ,4 ,6 y 12, pero el mayor de ellos es **12**, éste es el MCD.

PROPIEDADES DEL M.C.D.

1) El MCD de los números primos es la unidad.

2) El MCD de dos o más números primos entre si es la unidad.

3) De dos números diferentes, estando uno contenido en el otro, MCD de ellos es el menor.

4) Si se divide dos números entre su MCD los cocientes que resultan son números primos relativos.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor multiplo común que contenga exactamente a los números dados.

REGLA PARA HALLAR EL m.c.m. DE DOS O MÁS NÚMEROS

Se descompone los números dados en sus factores primos; el m.c.m. de los números es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con sus mayores exponentes.

Ejemplo:

Hallar el mcm de 180; 528; 936.

180	2	528	2
90	2	264	2
45	3	132	2
15	3	66	2
5	5	33	3
1		11	11
		1	

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad$ $528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$

936	2
468	2
234	2
117	3
39	3
13	13
1	

$$936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$\therefore$ m.c.m. (180; 528; 936) =

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 102\,960$$

PROPIEDADES

1° El mcm de dos o más números primos absolutos es igual al producto de ellos.

2° El mcm de dos números primos entre sí es el producto de ellos.

3° El cm de dos números, de los cuales uno contiene al otro es el mayor de ellos.

4° Si dos o más números son multiplicados o divididos por otro, el mcm queda multiplicado o dividido, respectivamente, por dicho número.

5° Si se divide el mcm de varios números entre cada uno de ellos, los cocientes resultantes son primos entre sí.

6° El producto de dos núneros enteros es igual al producto de MCD por el mcm.

$$\text{m.c.m.} = \frac{A \cdot B}{\text{MCD}}$$

o:

$$A \cdot B = (\text{mcm})\ (\text{MCD})$$

NÚMEROS RACIONALES (Fracciones)

A. FRACCIONES ORDINARIAS

Número fraccionario o quebrado es aquel número que está constituido por una o más partes de la unidad.

NOTACIÓN

Una fracción se denota por:

$$\frac{a}{b}$$

donde:

a es el numerador

b es el denominador

CLASIFICACIÓN

1) Fracciones propias.-
Son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador.

Ejemplo: $\frac{5}{9}$

2) Fracciones impropias.-
Son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Las fracciones impropias son las que dan origen a los números mixtos.

Ejemplo: $\frac{8}{3} = 2\,\frac{2}{3}$ (número mixto)

3) Fracciones homogéneas.-
Dos o más fracciones son homogéneas cuando tienen el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{22}{9}$

4) Fracciones heterogéneas.-
Dos o más fracciones son heterogéneas cuando tienen distintos denominadores.

Ejemplo: $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{11}$

5) Fracciones equivalentes.-
Una fracción es equivalente a otra fracción si la segunda resulta de multiplicar o dividir al numerador y al denominador de la primera por un mismo número.

Ejemplo: $\frac{a}{b} < > \frac{a \cdot K}{b \cdot K} < > \frac{a/K}{b/K}$

6) Fracción irreductible.-
Cuando el numerador y denominador son primos entre sí (primos relativos).

Ejemplo: $\frac{3}{7}$

7) Fracciones iguales a la unidad.-
Cuando tienen numerador y denominador iguales.

Ejemplo: $\frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \ldots = \frac{n}{n} = 1$

PROPIEDADES

1° Si el numerador y el denominador son multiplicados o divididos por un mismo número, el quebrado no varía.

Ejemplo: $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{5 \div 8}{9 \div 8}$

2° De varias fracciones homogéneas, es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\frac{3}{17}, \frac{12}{17}, \frac{6}{17}$

$$\frac{12}{17} > \frac{6}{17} > \frac{3}{17}$$

3° De varias fracciones heterogéneas que tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\frac{7}{15}, \frac{7}{31}, \frac{7}{6}$

$$\therefore \quad \frac{7}{6} > \frac{7}{15} > \frac{7}{31}$$

4° El mcm de dos o más fracciones irreductibles es igual al mcm de los numeradores dividido entre el MCD de los denominadores.

Sean las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{n}{m}, \frac{c}{d}$, irreductibles:

$$\text{m.c.m.} = \frac{\text{mcm}\ (a, n, c)}{\text{MCD}\ (b, m, d)}$$

5° El MCD de dos o más fracciones irreductibles es igual al MCD de los numeradores dividido entre el m.c.m. de los denominadores.

Sean las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{n}{m}, \frac{c}{d}$, irreductibles:

$$\text{MCD} = \frac{\text{MCD}\ (a, n, c)}{\text{mcm}\ (b, m, d)}$$

FRACCIONES DECIMALES

Una fracción es decimal si su denominador es 10 o multiplo de 10.

Las fracciones decimales pueden ser:

CLASIFICACIÓN

a) Fracción decimal limitada.-
Son las que presentan un número limitado de cifras. A su vez, éstas puede ser:

- Fracción decimal exacta (fde).

Ejemplos:

0,362

0,125

- Fracción decimal periodica pura (fdpp).

Ejemplo: $0,\widehat{31}\ \widehat{31} \ldots = 0,\widehat{31}$

- Fracción decimal periódica mixta (fdpm).

Ejemplo: $0,25\ \widehat{37}\ \widehat{37} \ldots = 0,25\ \widehat{37}$

b) Fracción decimal ilimitada.-
Son las fracciones decimales que presentan un número indefinido de cifras y pueden ser:

- Números irracionales:

Ejemplo: $\sqrt{3} = 1,7320506 \ldots$

- Números trascendentes

Ejemplos: $\pi = 3,\ 14159265 \ldots$

$e = 2,71828183 \ldots$

TRANSFORMACIÓN DE FRACCIONES

1) Generatriz de una fracción decimal exacta.

Sea: $0{,}a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_n$ una fde.

Su Generatriz es:

$$g = \frac{\overline{a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_n}}{10^n}$$

Ejemplos:

i) $0{,}183 = \dfrac{183}{10^3} = \dfrac{183}{1\,000}$

ii) $3{,}25 = \dfrac{325}{10^2} = \dfrac{325}{100}$

2) Generatriz de una fracción decimal periódica pura.

Sea:

$0{,}\overline{b_1\,b_2\,b_3 \ldots b_n\,b_1\,b_2\,b_3 \ldots b_n}$ una fdpp.

Su generatiz es:

$$g = \frac{b_1\,b_2\,b_3 \ldots b_n}{10^n - 1}$$

Ejemplo: $0{,}\overset{\frown}{31}\,\overset{\frown}{31}\ldots$

Su generatriz: $g = \dfrac{31}{10^2 - 1} = \dfrac{31}{99}$

3) Generatiz de una fracción decimal periódica mixta.

Sea:

$0{,}a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_m b_1\,b_2 \ldots b_n\,b_1\,b_2 \ldots$ una fdpm

Su generatriz correspondiente es:

$$g = \frac{(a_1a_2 \ldots a_m b_1b_2 \ldots b_n) - (a_1a_2 \ldots a_m)}{10^m(10^n - 1)}$$

Ejemplos:

i) $0{,}361515 \ldots = \dfrac{3\,615 - 36}{10^2(10^2 - 1)} = \dfrac{3\,579}{9\,900}$

ii) $0{,}26161 \ldots = \dfrac{261 - 2}{10^1(10^2 - 1)} = \dfrac{259}{990}$

POTENCIA Y RADICACIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS

CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA

CUADRADO

Se denomina cuadrado o segunda potencia de un número, al producto que resulta de multiplicar dicho número por sí mismo.

OPERACIONES MÁS IMPORTANTES

1) $a \cdot a = a^2$

2) $a^2 + 3a^2 = 4a^2$

3) $(a^n)^2 = a^{2n}$

4) $a^2 : a = \dfrac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = a^1 = a$

5) $(a \cdot b^3 \cdot c^2)^2 = a^2 \cdot b^{3 \cdot 2} \cdot c^{2 \cdot 2} = a^2 \cdot b^6 \cdot c^4$

6) $\left(\dfrac{a^n}{b^m}\right)^2 = \dfrac{a^{2n}}{b^{2m}}$

7) $(a \cdot 10^n)^2 = a^2 \cdot 10^{2n}$

CUADRADO PERFECTO

Un número es un cuadrado perfecto cuando al descomponerlo en el producto de sus factores primos, éstos presentan exponentes múltiplos de 2.

$$n = a^{\overset{\circ}{2}} \cdot b^{\overset{\circ}{2}} \cdot c^{\overset{\circ}{2}} \cdot d^{\overset{\circ}{2}} \;;\; (\overset{\circ}{2} = \text{multiplo de } 2)$$

Ejemplo: $324 = 2^2 \cdot 3^4$

RAÍZ CUADRADA

Raíz cuadrada de un número, es otro número que, elevado al cuadrado, reproduce el número original.

$$\sqrt{N} = q \quad \Rightarrow \quad q^2 = N$$

La raíz cuadrada puede ser exacta o inexacta

Exacta: $\sqrt{N} = q$

Inexacta: $\sqrt{N} = q + r$

RAÍZ CUADRADA CON APROXIMACIÓN EN MENOS DE UNA FRACCIÓN

$$A = \frac{a}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 . N}$$

N = número a extraer su raíz cuadrada

A = raíz cuadrada con aproximación de una fracción

$\frac{a}{b}$ = fracción de aproximación

Ejemplo:

Hallar $\sqrt{196}$ con una aproximación menor que $\frac{3}{7}$

$$A = \frac{3}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 . 196} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{7^2 . (4 . 7^2)}{3^2}}$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt{\frac{49^2 . 2^2}{3^2}} = \frac{3 . 49 . 2}{7 . 3} = 14$$

CUBO Y RAÍZ CÚBICA

CUBO

Se denomina cubo o tercera potencia de un número, al producto que resulta de multiplicar dicho número 3 veces como factor.

OPERACIONES MÁS IMPORTANTES

1) $a . a . a = a^3$

2) $(a^n)^3 = a^{3n}$

3) $a^3 : a = \frac{a^3}{a^1} = a^{3-1} = a^2$

4) $(a^n . b^m . c^p)^3 = a^{3n} . b^{3m} . c^{3p}$

5) $\left(\frac{a^n}{b^n}\right)^3 = \frac{a^{3n}}{b^{3n}}$

6) $(a . 10^n)^3 = a^3 . 10^{3n}$

7) $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$

RAÍZ CÚBICA

Es aquel número que, elevado al cubo, reproduce el número original.

$$\sqrt[3]{N} = q \Rightarrow q^3 = N$$

La raíz cúbica puede ser exacta e inexacta:

Exacta: $= \sqrt[3]{N} = q$

Inexacta: $= \sqrt[3]{N} = q + r$

RAÍZ CÚBICA CON APROXIMACIÓN MENOR QUE UNA FRACCIÓN

$$A = \frac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^3 . N}$$

N = número a extraer a su raíz cúbica

A = raíz cúbica con aproximación

$\frac{a}{b}$ = fracción de aproximación

Ejemplo:

Hallar $\sqrt[3]{27\,000}$ con aproximación de $\frac{1}{2}$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^3 . 3^3 . 10^3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{216 . 10^3} = \frac{6 . 10}{2} = 30$$

SISTEMAS DE MEDIDAS

SISTEMAS TRADICIONALES

SISTEMA MÉTRICO

La definición moderna de 1 metro equivale a 1 650 736, 73 veces la longitud de onda de la luz anaranjada emitida por los átomos de un isótopo puro de criptón (criptón 86) bajo una descarga eléctrica.

MEDIDAS AGRARIAS

1 área = 100m^2

Hectárea = 10 000m^2 = 100 áreas

Centiárea = 1m^2

MEDIDAS DE VOLUMEN

1 metro cúbico = 1m^3

1 decímetro cúbico = 0,001 m^3

1 centímetro cúbico = 0,000001 m^3

1 milímetro cúbico = 0,000000001 m^3

MEDIDAS DE CAPACIDAD

1 Mirialitro = ML = 10 000 L

1 kilolitro = kL = 1 000 L

1 Decalitro = DL = 10 L

1 Litro = Lt = 1L = 1 decímetro cúbico

1 decilitro = dL = 0,1 L

1 centilitro = cL = 0,01 L

1 militro = mL = 0,001 L

MEDIDAS DE PESO

1 tonelada métrica = 1 000 kilos

1 quintal métrico = 100 kilos

SISTEMA ESPAÑOL

LONGITUD

1 legua = 6 666 2/3 varas = 4 827 m

1 vara = 2,76 pies = 0,84 m

1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm

1 pulgada = 2,54 cm

SUPERFICIE

1 vara cuadrada = 0,7 m^2

AGRARIA

1 fanegada = 28 978 m^2 = 3Ha

1 fanegada: es el área de terreno equivalente a 144 varas de ancho y 288 varas de largo.

VOLUMEN

1 vara cúbica = 0,59 m^3

PESO

1 tonelada	=	20 quintales	= 920 kg
1 quintal	=	4 arrobas	= 46 kg
1 arroba	=	25 libras	= 11,4 kg
1 libra	=	16 onzas	= 0,454 kg
1 onza	=	8 dracmas	= 28,38 g
1 dracma	=	2 adarmes	= 2,5 g
1 adarme	=	3 tomines	= 1,25 g

SISTEMA INGLES

LONGITUD

1 yarda	= 3 pies	= 0,914 m
1 pie	= 12 pulgadas	= 30,48 cm
1 pulgada		= 2,54 cm

LONGITUD: Itinerarias

1 milla marina = 1 852 m

1 milla terrestre = 1 609 m

SUPERFICIE

1 yarda cuadrada = 0,836 m^2

1 pie cuadrado = 0,093 m^2

1 pulgada cuadrada = 0,000645 m^2

AGRARIA

1 acre = 43 560 pies cuadrados = 4 047 m^2

VOLUMEN

1 yarda cúbica = 0,7646 m^3

1 pie cúbico = 0,02832 m^3

1 pulgada cúbica = 0,000016 m^3

CAPACIDAD

1 galón imperial = 4,546 L

(1 galón U.S.A. = 3,785 L)

PESO

Se utiliza tres sistemas:

Avoirdupois (más utilizado)

Troy (usado para metales nobles)

Apothecables (usado en farmacias)

SISTEMA AVOIRDUPOIS (avdp)

1 tonelada larga = 2 240,0 lb = 1 016,05 = kg

1 tonelada corta = 2 000,0 lb = 907,18 = kg

1 quintal = 100,0 lb = 45,36 = kg

1 libra = 16,0 Onz. = 453,59 = g

1 onza = 16,0 dracmas = 28,35 = g

1 dracma = 27,3 granos = 1,77 = g

DENSIDAD DE ALGUNOS CUERPOS g/cm^3

agua destilada = 1

agua de mar = 1,03

aire = 0,00129

hielo = 0,92

hierro = 7,8

leche = 1,03

petróleo = 0,8

RELACIONES ENTRE LONGITUD Y TIEMPO

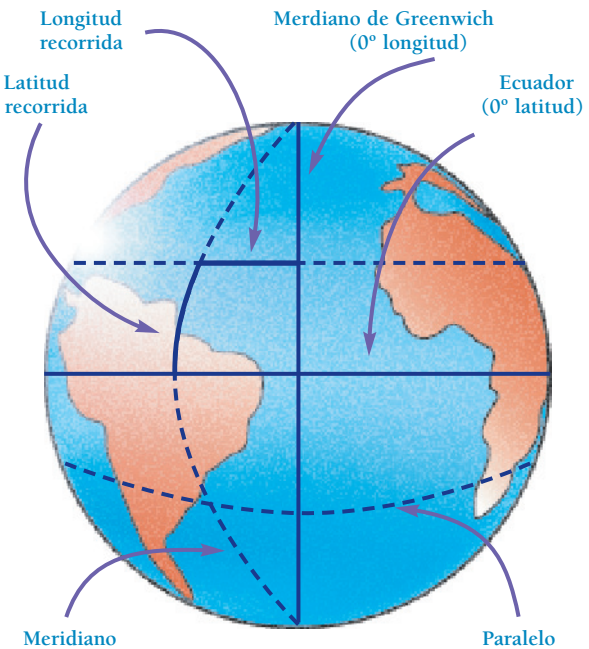
Tiempo		Arco
1 día	=	360º
1 hora	=	15º
1 minuto	=	15’
1 segundo	=	15”

DIMENSIONES GEOGRÁFICAS

Longitud: Distancia medida en arco sobre un círculo máximo de la tierra (el Ecuador) al meridiano de Greenwich.

Latitud: Distancia, medida en arco sobre un meridiano de cualquier punto al Ecuador.

Longitud y Latitud del punto P:



SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Está basada en el sistema métrico.

UNIDADES DE BASE

Son 7 unidades de base, establecidas arbitrariamente y consideradas independientemente porque no guardan relación entre sí:

MAGNITUDES FÍSICAS	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de materia	mol	mol

UNIDADES SUPLEMENTARIAS

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZONES

Se llama "razón" a la comparación de dos cantidades. Esta comparación puede hacerse mediante una DIFERENCIA, en tal caso se llama "razón aritmética", o mediante una DIVISIÓN, en tal caso se llama "razón geométrica".

Razón Aritmética (R A)

$$a - b = d$$

Razón Geométrica (R G)

$$\frac{a}{b} = K$$

donde:

a: antecedente

b: consecuente

PROPIEDADES Y LEYES

Con la R A es una diferencia y la R G es una división, éstas cumple con las mismas propiedades de la resta y division, respectivamente.

PROPORCIONES

Se llama "proporción" a la igualdad de dos razones, siendo la característica principal que estas razones son iguales. Las proporciones pueden ser Aritméticas y Geométricas.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Sean las R A: $a - b = k$

$c - d = k$

$\therefore$ P A: $a - b = c - d$

o, también: $a \,.\, b : c \,.\, d$

Se lee: "a es a b, como c es a d"

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Sean las RG

$$\frac{a}{b} = k$$

$$\frac{c}{d} = k$$

$\therefore$ P G: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

o, también: $a : b :: c : d$

Se lee: "a es a b, como c es a d"

CLASES DE PROPORCIONES SEGÚN SUS TÉRMINOS

1) Proporción discreta.-

Una proporción Aritmética o Geométrica es discreta si sus términos son diferentes:

Sean:

$$a - b = c - d \;\vee\; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \; a \neq b \neq c \neq d$$

En este caso, cualquiera de los términos se llama "Tercera Proporcional".

2) Proporción continua.-

Una proporción Aritmética o Geométrica es continua sis sus términos medios, o sus términos extremos son iguales así:

Sean:

$$a - b = c - d \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow b = c \quad \vee \quad a = d$$

En este caso cualquiera de los términos diferentes se llama "Tercera Proporcional" y al término que se repite se le llama:

"media diferencial" si es P A

"media proporcional" si es P G

TÉRMINOS NOTABLES

MEDIA DIFERENCIAL (m d)

Sea la P A continua: a - b = b - d

$$b = \frac{a + d}{2}$$

MEDIA PROPORCIONAL (m p)

Sea la P G continua: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

$$b = \sqrt{a \cdot d}$$

MEDIA ARMÓNICA (m h)

Sean los números a y b; con inversas:

$$\frac{1}{a} \ , \ \frac{1}{b}$$

$$\therefore \qquad m_h = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

PROMEDIOS

Se denomina promedio, o cantidad media, a una cantidad tal que: de varias cantidades, el promedio es mayor que la inferior pero menor que la superior. Puede ser Aritmética, Geométria o Armónica.

MEDIDA ARITMÉTICA:

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots + a_n}{n} \qquad a_1 < M_a < a_n$$

MEDIDA GEOMÉTRICA:

$$M_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad a_1 < M_g < a_n$$

MEDIDA ARMÓNICA:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \qquad a_1 < M_h < a_n$$

Además, se cumple que:

$$M_a > M_g \qquad M_g^2 = M_a \cdot M_h$$

y, el producto de dos cantidades es igual al producto de su media aritmética por su media armónica.

$$a \cdot b = Ma \cdot M_h$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple las siguientes propiedades:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$, se verifica las siguientes propiedades.

$$\frac{a + c + e}{b + d + f} = k$$

$$\frac{a \,.\, c \,.\, e}{b \,.\, d \,.\, f} = k^3$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes proporcionales son aquellas que guardan alguna relación matemática entre sí. Pueden ser directa e inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales.-

Se dice que dos magnitudes "A" y "B" son directamente proporcionales, cuando los cocientes de cada par de sus valores son iguales:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Magnitudes inversas proporcionales.-

Se dice que dos magnitudes "A" y "B" son inversamente proporcionales, cuando los productos de cada par de sus valores son iguales.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

$$\therefore \quad a_1 \,.\, b_1 = a_2 \,.\, b_2 = a_3 \,.\, b_3 = \dots = a_n \,.\, b_n = k$$

REGLA DE TRES

REGLA DE TRES SIMPLE

Se emplea para calcular un cuarto valor cuando otros tres son conocidos. La regla de tres simple puede ser: directa e inversa.

a) Directa: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b \,.\, c}{a}$

b) Inversa: $a \,.\, b = c \,.\, x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a \,.\, b}{c}$

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

La regla del tanto por ciento es un caso particular de la regla de tres simple directa.

Ejemplo:

Calcular el 8% de 98.

A mayor tasa, mayor interés. Son directamente proporcionales, luego:

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{98}$$

$$x = \frac{8 \,.\, 98}{100}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Una regla de tres compuesta está formada por una o más reglas de tres simple, que pueden ser todas directamente proporcionales o todas inversamente proporcionales o de proporción mixta.

Ejemplo:

5 hombres en 8 días fabrican 600 m de tela.

13 hombres en x días fabrican 1 300 m de tela.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5 \,.\, 13 \,.\, 1\,300}{8 \,.\, 600} = 17{,}6 \text{ días} = 18 \text{ días}$$

ARITMÉTICA MERCANTIL

INTERÉS SIMPLE

INTERÉS O RÉDITO

Se denomina Interés o Rédito a la ganancia que produce una cantidad llamada Capital, prestada por un tiempo determinado y según una tasa fijada.

Hay dos clases de intereses: Simple y Compuesto. El Interés Compuesto se estudia en Algebra.

FÓRMULAS BÁSICAS

$$I = \frac{C \,.\, i \,.\, t}{100}$$

$$C = \frac{100 \,.\, I}{i \,.\, t}$$

$$M = C + I$$

I = Interés o rédito ganado.

C = Capital impuesto a un interés.

i = Tasa de interés (porcentaje que gana el capital).

t = Tiempo que demora el préstamo.

Si el tiempo es en años, se usa 100; si el tiempo está en meses, se usa 1 200; si el tiempo está en días, se usa 36 000.

M = Monto final que equivale a la suma del capital más el interes.

FÓRMULAS PARA CALCULAR EL MONTO EN FUNCIÓN DEL CAPITAL

$$M = \frac{C(100 + i \cdot t)}{100}$$

t en años

$$M = \frac{C(1\,200 + i + t)}{1\,200}$$

t en meses

$$M = \frac{C(36\,000 + i \cdot t)}{36\,000}$$

t en días

DESCUENTO

Es la disminuición que se hace a una cantidad indicada en un documento comercial para hacer efectivo su cobro antes de la fecha fijada para su vencimiento. El documento comercial, según su naturaleza se denomina:

Letra de cambio, Pagaré, Cheque bancario.

Hay dos clases de descuento:

Comercial y Racional.

DESCUENTO COMERCIAL

Es el interés simple, Dc, que produce el "Valor Nominal", Vn (que es aquel escrito en el documento) de una letra desde el día en que se hace el descuento hasta el día del vencimiento; a este descuento se le conoce también como descuento interno.

$$Dc = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{100}$$

t en años

$$Dc = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{1\,200}$$

t en meses

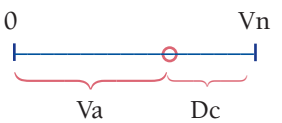
$$Dc = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{36\,000}$$

t en días

Además se define el nuevo valor a cobrar como:

$$Va = Vn - Dc$$

Va = Valor actual



valor actual en función del valor nominal

$$Va = \frac{Vn(100 - i \cdot t)}{100}$$

$$Va = \frac{Vn(1\,200 - i \cdot t)}{1\,200}$$

$$Va = \frac{Vn(36\,000 - i.\ t)}{36\,000}$$

DESCUENTO RACIONAL

Es el interés simple producido por el Valor Actual" de una letra, desde el día en que se hace el descuento hasta el día de su vencimiento.

$$Dr = \frac{Va \cdot i \cdot t}{100}$$

$$Dr = \frac{Va \cdot i \cdot t}{1\,200}$$

$$Dr = \frac{Va \cdot i \cdot t}{36\,000}$$

De este modo:

$$Vn = Va + Dr$$

VALOR ACTUAL EN FUNCIÓN DEL VALOR NOMINAL

$$Va = \frac{100 \cdot Vn}{100 + i \cdot t} \qquad Va = \frac{1\,200 \cdot Vn}{1\,200 + i \cdot t}$$

$$Va = \frac{36\,000 \cdot Vn}{36\,000 + i \cdot t}$$

COMPARACIÓN DEL DESCUENTO COMERCIAL CON EL DESCUENTO RACIONAL

Sólo por fines comparativos, establezcamos

$$Dr = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{100 + i \cdot t} \qquad Dr = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{1\,200 + i \cdot t}$$

$$Dr = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{36\,000 + i \cdot t}$$

Lo que cual, nos permite deducir que:

$$Dc > Dr$$

$$Dc - Dr = \frac{Dr \cdot i \cdot t}{100}$$

$$Vn = \frac{Dc \cdot Dr}{Dc - Dr}$$

VENCIMIENTO COMÚN

Es una operación comercial que consiste en realizar una pago único de dos o más letras de cambio que tienen diferentes vencimientos; la fecha en que se realiza el pago único se denomina vencimiento común.

$$t = \frac{V_1 + t_1 \cdot V_2 \cdot t_2 + \ldots + V_n \cdot t_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}$$

t = Número de días o plazo de vencimiento de la letra única.

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ = Plazo de vencimiento de cada una de las otras letras.

$V_1, V_2, \ldots V_n$ = Valores nominales de las otras letras.

DESCUENTOS SUCESIVOS

Todo los descuentos sucesivos aplicables, pueden ser consolidados en un descuento único "D.U.":

$$D.U. = \left[D_1 + D_2 - \frac{D_1 \cdot D_2}{100} \right] \%$$

D_1 = primer descuento

D_2 = segundo descuento

Ejemplo:

Un comprador logra un primer descuento de 25% y un descuento adicional, sobre el nuevo monto, del 10%. Se pregunta ¿ Cuál es el descuento final (único) que obtiene?

Solución:

Aplicando la fórmula:

$$D.U. = \left[25 + 10 - \frac{25 \cdot 10}{100} \right]$$

D.U. = 35 - 2,5 = 32,5

Luego: D.U. = 32,5 %

Como podrá observarse el descuento único NO es el 35 % (25 + 10).

AUMENTOS SUCESIVOS

Porcentajes de aumento a las nuevas cantidades, resultan en un Aumento Único "A.U.":

$$A.U. = \left[A_1 + A_2 + \frac{A_1 \cdot A_2}{100} \right]$$

Ejemplo:

Un capital aumenta en dos porcentajes sucesivos de 18 % y 12 %. ¿Cuál es el porcentaje de aumento único?
Solución:

Dado que el 12% se aplica sobre el nuevo monto, la respuesta No Es 40% (18 + 12):

$$A.U. = \left[18 + 12 + \frac{18 \,.\, 12}{100} \right]$$

$$A.U. = 30 + 2{,}16 = 32{,}16$$

Luego: A.U. = 32,16 %

REGLAS DE FALSA SUPOSICIÓN

Consiste en un supuesto que se hace del valor numérico de la respuesta a un problema. Puede ser SIMPLE o DOBLE.

1) Simple.-

Se asigna a la incógnita un valor numérico supuesto. Si este valor se opera y se cumple con el problema, es la respuesta; en caso contrario, se plantea la proporción:

$$\frac{\text{Resultado obtenido}}{\text{Número supuesto}} = \frac{\text{Resultado que debe obtenerse}}{\text{Incógnita}}$$

2) Doble.-

Consiste en suponer dos valores distintos para la incóginta, con estos valores se opera y la diferencia de cada uno de estos resultados con el verdadero, constituyen los errores.

$$x = \frac{V' \,.\, e - V'' \,.\, e}{e'' - e'}$$

X = Incógnita

V' = Primer valor supuesto

V" = Segundo valor supuesto

e' = Error que se comente con V'

e" = Error que se comete con V"

REPARTIMIENTO PROPORCIONAL

TIPOLOGÍA

Consiste en repartir un número "N" en otros números tales como x, y, z, que sean a su vez proporcionales a los números a, b, c.

El reparto puede ser directo o inversamente proporcional.

1) Reparto directamente proporcional.-

Repartir el número "N" en partes directamente proporcionales a los números a, b, c.

Sean x, y, z los números buscados:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{N}{a + b + c}$$

De aqui:

$$x = \frac{N \,.\, a}{a + b + c} \qquad y = \frac{N \,.\, b}{a + b + c} \qquad z = \frac{N \,.\, c}{a + b + c}$$

Por principio de proporción geométrica:

$$x + y + z + = N$$

2) Reparto inversamente proporcional.-

Consiste en repartir el número "N" en 3 números que sean inversamente proporcionales a los números a, b, c.

Sean x, y, z los números buscados.

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

De aqui:

$$x = \frac{\frac{1}{a} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \qquad y = \frac{\frac{1}{b} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$z = \frac{\frac{1}{c} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Por principio, se cumple que:

$$N = a + b + c$$

REPARTIMIENTO PROPORCIONAL COMPUESTO

Es repartir el número N en partes directamente proporcionalesa los números a, b. c e inversamente proporcionales a los números a', b', c'.

$$\frac{x}{\frac{a}{a'}} = \frac{y}{\frac{b}{b'}} = \frac{z}{\frac{c}{c'}} = \frac{N}{\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}}$$

APLICACIONES

REGLA DE COMPAÑIA O DE SOCIEDAD

Es una aplicación de los repartos proporcionales. El objetivo es repartir entre dos o más socios la ganancia o pérdida. Puede ser simple o compuesta.

REGLA DE COMPAÑIA COMPUESTA

$$g_1 = \frac{G \cdot c_1 \cdot t_1}{c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2 + \ldots + c_n \cdot t_n}$$

$$g_2 = \frac{G \cdot c_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2 + \ldots + c_n \cdot t_n}$$

Donde:

$g_1, g_2, \ldots$ = ganancias o pérdidas de cada socio

G = ganancia o pérdida total

$c_1, c_2, \ldots$ = capitales aportados por cada socio

$t_1, t_2, \ldots$ = tiempo en que se impone cada capital

n = número de socios

REGLA DE COMPAÑIA SIMPLE

Puede presentarse los siguientes casos:

a) Capitales iguales y tirmpos iguales:

$$(c_1 = c_2 = \ldots ; t_1 = t_2 = \ldots)$$

$$g = \frac{G}{n}$$ (g = ganancia o pérdida)

Ganancia o pérdida igual para cada socio.

b) Capitales diferentes y tiempos iguales:

$$(t_1 = t_2 = \ldots = t_n)$$

$$g_1 = \frac{G \cdot c_1}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}$$

c) Capitales iguales y tiempos diferentes:

$$(c_1 = c_2 = \ldots = c_n)$$

$$g_1 = \frac{G \cdot t_1}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$$

REGLA DE MEZCLA O ALIGACIÓN

Se presenta dos casos: Mezcla propiamente dicha y aleación.

A) MEZCLA

Es la unión de dos o más ingredientes, conservando cada cuál su naturaleza. Desde un punto de vista comercial, la mezcla se realiza con el objeto de establecer el precio promedio, de manera que no haya pérdida ni ganancia.

Puede ser Directa o Inversa.

REGLA DE MEZCLA DIRECTA

Sirve para calcular el precio promedio:

$$Pm = \frac{p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 + \ldots + p_n \cdot c_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}$$

Pm = Precio medio

$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ = Precios unitarios de cada ingrediente.

$c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ = cantidades de cada ingrediente.

REGLA DE MEZCLA INVERSA

Sirve para calcular las proporciones en que intervienen los ingredientes, conocidos susprecios unitarios y su precio medio.

$$\frac{x}{y} = \frac{Pm - py}{px - Pm}$$

x, y = ingredientes de la mezcla (magnitudes físicas: peso, etc.)

Pm = precio medio de la mezcla

px, py = precios unitarios de los ingredientes

ALEACIÓN

Es el resultado que se obtiene al fundir varios metales, entre ellso siempre hay un metal más fino. La aleación es una mezcla.

LEY DE ALEACIÓN

Es la relación del peso del metal fino y el peso total de la aleación, se expresa en milésimos.

$$L = \frac{F}{P}$$

L = ley de aleación

F = peso del metal fino

P = peso de la aleación

ALEACIÓN DIRECTA

Se trata de calcular la ley de una aleación resultante al fundir lingotes de diferentes leyes.

$$L = \frac{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

L = ley de aleación

$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ = peso del metal fino en cada lingote.

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ = peso de cada lingote.

ALEACIÓN INVERSA

Se trata de calcular la proporción de los pesos de los lingotes que intervienen en la aleación, cuyas leyes se conoce:

$$\frac{x}{y} = \frac{L_s - L_m}{L_m - L_i}$$

x = peso del lingote de ley superior

y = peso del lingote de la ley inferior

L_s = ley del lingote de ley superior

L_i = ley del lingote de ley inferior

L_m = ley media

CAMBIOS EN LA LEY DE UNA ALEACIÓN

AUMENTO DE LA LEY DE UNA ALEACIÓN

$$p = \frac{P(L_A - L)}{L_A}$$

p = peso del metal fino que se tiene que agregar

P = peso inicial de la aleación

L_A = nueva ley del lingote

L = ley inicial del lingote

DISMINUCIÓN DE LA LEY DE UNA ALEACIÓN

$$p = \frac{P(L - L_D)}{L_D}$$

p = peso del metal pobre que se tiene que agregar

P = peso inicial de la aleación

L_D = nueva ley del lingote

L = ley inicial del lingote

LEY DE KILATES

Kilate es una forma de iniciar la pureza de una aleación denotando el número de partes de metal fino en 24 partes de aleación.

Por ejemplo, oro de 18 kilates quiere decir que si la joya pesa 24, 18 son de oro. También se puede expresar en porcentaje.

$$L = \frac{\text{Número de kilates}}{24}$$

Ejemplo:

¿Que porcentaje de metal fino contiene unas joyas de oro de 18 kilates?

$$L = \frac{18}{24} = 0{,}75$$

$\therefore$ P = 75% de oro puro.

ÁLGEBRA

DEFINICIÓN

Es la parte de la matemática elemental que estudia a la cantidad en su forma más general. Para su estudio emplea números y letras.

NOTACIÓN USADA EN EL ÁLGEBRA

Las cantidades conocidas son representadas por las pirmeras letras del alfabeto: a, b, c, d, … ; las cantidades desconocidas o incógnitas, por las últimas letras: x, y, z, …

Para no repetir las letras, cuando hay alguna relación entre ellas se escribe:

a', b', c' …; o también : a_1, b_2, c_3 …

Los signos empleados en el algebra, son de tres clases: de operación, de relación y de agrupación.

A) SIGNOS DE OPERACIÓN

Son seis: + ; - ; · ; : ; a^n ; $\sqrt{\ }$

Ejemplos:

i) +, se lee: "más".

a + b, se lee: "a más b"

ii) - , se lee: "menos"

a - b, se lee: "a menos b"

iii) · , se lee: "por"

a . b, se lee: "a por b"

iv) : , se lee: "entre"

a : b, se lee: "a entre b"

v) Exponente:

a^n, se lee: "a, a la n". (signo de potencia)
Significa "n" veces "a" como factor, así:

$$\underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}_{n}$$

vi) $\sqrt{\ }$, se lee: "raíz"

$\sqrt{a}$, se lee: "raíz cuadrada de a"

B) SIGNOS DE RELACIÓN

= , se lee: "igual"

a = b, se lee: "a igual b"

> , se lee: "mayor que"

a > b, se lee: "a mayor que b"

< , se lee: "menor que"

a < b, se lee: "a menor que b"

≥ , se lee: "igual o mayor que"

a ≥ b, se lee: "a igual o mayor que b"

≤ , se lee: "menor o igual que"

a ≤ b, se lee: "a igual o menor que b"

≡ , se lee: “idénticamente igual a”

a ≡ b, se lee: “a identicamente igual a b”

≠ , se lee: “diferente de”

a ≠ b, se lee: “a diferente de b”

≮ , se lee: “ se lee no es menor que”

a ≮ b, se lee: “a no es menor que b”

≯, se lee: “no es mayor que”

a ≯ b, se lee: “a no es mayor que b”

≃, se lee: “aproximadamente igual a”

a ≃ b, se lee: “a aproximadamente a b”

<>, se lee: “equivalente a”

a <> b, se lee: “a equivalente a b”

⇒, se lee: “a entonces b”

a ⇒ b, se lee: “a entonces a b” o
“a implica a b”

∧, se lee: “y”

a ∧ b, se lee: “a y b”

∨, se lee: “o”

a ∨ b, se lee: “a o b”

≅ , se lee: “es congruente con”

b ≅ b, se lee: “b es congruente con b”

C) SIGNOS DE AGRUPACIÓN

( ) : paréntesis

[ ] : corchetes

{ } : llaves

— : vínculo o barra

VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO

A) Valor absoluto o número absoluto, es el valor que denota la fugura que representa, independiente del signo.

Ejemplos:

| -5 | = 5 ; | 3 | = 3

B) Valor relativo o número relativo, es el valor que depende del signo que la acompaña.

Ejemplos:

-7 ; +4

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS RELATIVOS

A) SUMA

- Suma de dos números positivos:

(+5) + (+7) = +5 + 7 = +12

- Suma de dos números negativos:

(-3) + (-5) = -3 - 5 = - 8

- Suma de un número positivo y un número negativo:

(+7) + (-3)= +7 - 3 = +4

(-12) + (+2) = -12 + 2 = -10

B) SUSTRACCIÓN

- (+8) - (+4) = +8 - 4 = +4
- (-8) - (-13) = -8 + 13 = +5
- (-12) - (-8) = -12 + 8 = -4

C) MULTIPLICACIÓN

- (+3) (+5) = +15
- (-2) (-3) = +6
- (+5) (-8) = -40
- (-12) (+3) = -36

D) DIVISIÓN

- $(+18) \div (+2) = +9$
- $(+12) \div (-4) = -3$
- $(-15) \div (-3) = +5$
- $(-14) \div (+7) = -2$

E) POTENCIA

$$(+2)^2 = +4$$

$$(-5)^4 = 625$$

$$(-3)^3 = -27$$

F) RAÍCES

$$\sqrt[par]{(+)} = + \text{ y/o } - \text{ (dos raíces)}$$

$$\sqrt[par]{(-)} = \text{número imaginario}$$

$$\sqrt[impar]{(+)} = +$$

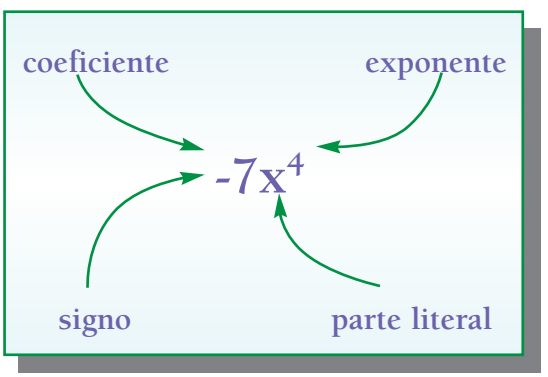
$$\sqrt[impar]{(-)} = -$$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

PRINCIPALES CONCEPTOS

TERMINO ALGEBRAICO

Es la mínima expresion algebraica cuyas partes no están separadas ni por el signo más ni por el signo menos. Las partes de un término algebraico son:



EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es el conjunto de números y letras unidas entre sí por los signos de operación: más, menos, por, entre, exponente, radiación.

Ejemplo:

i) $4x^2 + 5y^2 + 7z^2$

ii) $4x$

iii) $\dfrac{3x^5 + \sqrt{1 + x}}{2xy + y^5}$

Las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas no son expresiones algebraicas, son funciones trascendentes.

Ejemplos:

i) 5^x

ii) $\log_b x$

iii) sen x

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A) RACIONALES.-

Sus exponentes son enteros, la cantidad sub-radical no tiene letras.

Ejemplos:

i) $4ax^2 + 5y^3 + 7z^4 + 3x^{-5}z$

ii) $\dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{5z}{6}$

iii) $2y + \sqrt{3}\,x + \sqrt[5]{7}\,x^5y$

B) IRRACIONALES.-

Tiene exponentes fraccionarios, la cantidad sub-radical incluye letras.

Ejemplos:

i) $5x^{1/2} + 7y^{1/3} + 8z^{1/5} + 9y^{-1/2}$

ii) $4x^{12} + 5y + 2\sqrt{3xy}$

iii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3y}{\sqrt[3]{z}} + \dfrac{7}{\sqrt[5]{y}}$

A su vez, las expresiones algebraicas irracionales pueden ser enteras o fraccionarias.

- **Racional entera.-** Denominadores sin letras, exponentes positivos.

  Ejemplos:

  i) $2x^2 + 3z^2y^3 + 6w^4$

  ii) $3x^4 + \dfrac{9y^2}{8} + \dfrac{1}{3}z^2$

- **Racional fraccionaria.-** Denominadores con letras, exponentes negativos.

  Ejemplos:

  i) $4x^{-3} + 7y^{-9} + \dfrac{7x}{4yz^2} - \dfrac{2}{3y}$

Obsérvese que:

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$y^{-9} = \frac{1}{y^9}$$

ii) $\dfrac{4x^2 + 2y + z}{5x^4 + 2x + z}$

TEORÍA DE EXPONENTES

La teoría de exponentes estudia todas las clases de exponentes que existen y las relaciones entre ellos.

OPERACIÓN DE EXPONENTES

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5) $a^0 = 1,\ a \neq 0$

6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

8) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

9) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$

10) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

11) $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$

12) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

13) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

LEY DE LOS SIGNOS

1) MULTIPLICACIÓN

$(+) \cdot (+) = (+)$

$(+) \cdot (-) = (-)$

$(-) \cdot (+) = (-)$

$(-) \cdot (-) = (+)$

2) DIVISIÓN

$\dfrac{(+)}{(+)} = (+)$ $\qquad$ $\dfrac{(+)}{(-)} = (-)$

$\dfrac{(-)}{(+)} = (-)$ $\qquad$ $\dfrac{(-)}{(-)} = (+)$

3) POTENCIA

$(+)^{2n} = (+)$

$(+)^{2n+1} = (+)$

$(-)^{2n} = (+)$

$(-)^{2n+1} = (-)$

4) RADIACIÓN

$$\sqrt[2n+1]{(+)} = (+)$$

$$\sqrt[2n+1]{(-)} = (-)$$

$$\sqrt[2n]{(+)} = (\pm)$$

$$\sqrt[2n]{(-)} = \text{número imaginario}$$

Nota.- 2n = número par

2n + 1 = número impar

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son igualdades relativas cuyas incógnitas aparecen como exponentes. Se llama igualdad relativa aquella que se verifica soló para algunos valores que se le asigna a la incógnita.

Así:, por ejemplo:

$$7^{x+1} = 343$$

$$7^{x+1} = 7^3$$

igualando exponentes:

$$x + 1 = 3$$

$$\therefore \quad x = 2$$

VALOR NUMÉRICO

Es aquel valor que adquiere una expresión algebraica cuando se le asigna un valor numérico a sus letras.

Ejemplo:

Hallar el valor numérico de:

$$E = x^5 + 3x^2 - 8x + 1; \text{ para } x = 1$$

sustituyendo x = 1:

$$E = 1^5 + 3 \,.\, 1^2 - 8 \,.\, 1 + 1 = -3$$

GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

GRADO

Es una característica de la expresión algebraica, dada por el exponente de sus letras, el cual debe ser un número entero y positivo. El exponente permite además determinar el número de soluciones que tiene una ecuación. El grado puede ser relativo y absoluto.

GRADOS DE UN MONOMIO

MONOMIO

Es la mínima expresión algebraica formado por un solo **término algebraico**.

GRADO ABSOLUTO (G.A)

Es la suma de los exponentes de todas las letras del monomio.

Ejemplo:

$$M = x^2y^3z^{-1}$$

$\therefore$ G.A.M. = 2 + 3 - 1 = 4

GRADO RELATIVO (G.R.)

Está dado por el exponente de una letra del monomio.

Ejemplo:

$$M = 4x^3y^5z^4w^2$$

$\therefore$ G.R.M. y = 5

G.R.M. x = 3

que se lee: "el grado relativo del monomio respecto a la letra y es 5 y respecto a la letra x, es 3".

GRADOS DE UN POLINOMIO

POLINOMIO

Es una expresión algebraica que tiene 2 o más términos algebraicos.

Por convención, se denomina:

Binomio: cuando tiene 2 términos

Trinomio: cuando tiene 3 términos, etc.

GRADOS ABSOLUTO DE UN POLINOMIO(G.A.P.)

Está dado por el grado del término que tiene mayor grado absoluto.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$$P = 4x^2y^3w^4 + 3xy^5w - 18x^6y^8w^{-7}$$

G.A. de $4x^2y^3w^4$ = 2 + 3 + 4 = 9

G.A. de $3xy^5w$ = 1 + 5 + 1 = 7

G.A. de $-18x^6y^8w^{-7}$ = 6 + 8 - 7 = 7

Luego: G.A.P. = 9

GRADO REALTIVO DE UN POLINOMIO(G.R.P.)

Está dado por el mayor exponente de la letra referida en el problema. Así en el polinomio del ejemplo anterior:

G.R.P. respecto a $x = 6$

G.R.P. respecto a $y = 8$

G.R.P. respecto a $w = 4$

POLINOMIOS

NOTACIÓN POLINÓMICA

Es la representación de un polinomio, mediante sus variables y sus constantes.

VARIABLE.- Es toda magnitud que cambia de valor.

CONSTANTE.- Es toda magnitud que tiene valor fijo.

NOTACIÓN POLINÓMICA.-

La notación polinómica es la siguiente:

1) P(x) se lee: "polinomio en x"

2) P(x, y) se lee: "polinomio en x, y"

3) P(x, y, z) se lee: "polinomio en x, y, z"

Ejemplos:

i) $P(x,y) = 4x^2 + 5y^3 + 2x^2y + 7$

ii) $P(x) = 5x^8 + 3x^5 - 6x^3 - 8$

iii) $P(x, y, z) = 8x^2y - 9xz + 2yz + 9z + 10y - 9$

POLINOMIOS ESPECIALES

Se trata de polinomios importantes con características útiles:

A) POLINOMIOS ORDENADOS

Son aquellos que son ordenados de manera creciente o decreciente con respecto al grado de una letra.

Ejemplo:

$$P(x,y) = 4x^3y^{12} + 5x^7y^8 + 4x^{12}y^2$$

P(x, y) está ordenado de forma creciente con respecto a x, ordenado de forma decreciente con respecto a y.

B) POLINOMIO COMPLETO

Con respecto a una letra, es aquel que se caracteriza porque los exponentes de la letra considerada existen desde el mayor hasta el cero inclusive.

A este último término se le denomina "término independiente".

Ejemplos:

i) $P(x, y) = 5x^5 + 6x^4y + 7x^3y^2 + 3x^2 - 7x + 6y^3$

P(x,y) es completo con respecto a "x". El "término independiente" es $6y^3$.

ii) $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 12x - 9$

es completado con respecto a x. El término independiente es -9.

PROPIEDADES DE UN POLINOMIO COMPLETO

- Si el polinomio es de grado "n" el número de términos es igual a "n + 1".
- El grado del polinomio completo es igual al número de términos menos 1.

$$G\,P = \#\,T\,P - 1$$

- La diferencia de grados relativos de dos términos consecutivos es igual a la unidad.

$$G\,R_{(t_{x+1})} - GR_{(t_x)} = 1$$

- El "término independiente" contiene a la variable con exponente cero.

Ejemplo:

$$-9x^0 = -9$$

C) POLINOMIO HOMOGENEO

Todos sus términos tienen igual grado absoluto.

P(x, y) = 4x7y12 + 8x3y16 + 6x2y17

G.A.P. = 19

D) POLINOMIOS IDENTICOS

Son aquellos caracterizados porque los términos semejantes tienen coeficientes iguales.

Ejemplo: $4x^5 + 7y \equiv 4x^5 + 7y$

TÉRMINO SEMEJANTE

Es aquel que tiene igual parte literal afectada de los mismos exponentes, sin interesar los coeficientes.

Ejemplo:

Son términos semejantes:

$$4x^5y^2 \quad ; \quad -12x^5y^2 \quad ; \quad \frac{1}{4}x^5y^2$$

E) POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO

Son aquellos cuyos coeficientes son iguales a cero.

Ejemplo:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

donde: $a = b = c = d = 0$

F) POLINOMIO ENTERO EN "x"

Sus exponentes son enteros y su única variable es "x".

De primer grado:

$$P(x) = ax + b$$

De segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

De tercer grado:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A) SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para sumar o restar expresiones algebraicas, se suma, o se resta los coeficientes de los términos semejantes.

Ejemplo:

$$-8bx^2y^5 + 12bx^2y^5 + bx^2y^5 = 5bx^2y^5$$

SUPRESIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN

1) Cuando el signo de colección está precedido del signo "más", se elimina este signo sin producir ningún cambio.

$$a + (b - c) = a + b - c$$

2) Cuando está precedido del signo "menos", se elimina el signo de colección cambiando todos los signos de suma o resta que se encuentra dentro de él.

$$a - (b - c) = a - b + c$$

INTRODUCCIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN

1) Cuando tiene que ir precedido del signo "más", se escribe el signo de colección sin realizar ningún cambio.

$$a + b - c = a + (b - c)$$

2) Cuando tiene que ir precedido del signo "menos", se escribe el signo de colección, cambiando los signos de suma y de resta de todos los términos que se introduce.

$$a - b + c = a - (b - c)$$

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es la operación que consiste en obtener una expresión llamada producto, conociendo otras dos llamadas multiplicando y multiplicador.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

- El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.
- El término independiente del producto es igual al producto de los términos independientes de los factores.

Ejemplo:

Sea el producto:

$$(4x^4 + 5x + 6) \,.\, (7x^5 + 6x^2 + 2) \,.\, (3x^2 + 6x - 3) \,.\, (2x - 5)$$

Grado (absoluto) del producto:

$$4 + 5 + 2 + 1 = 12$$

Término independiente:

$$(6)\ (2)\ (-3)\ (-5) = 180$$

CASOS EN LA MULTIPLICACIÓN

1) PRODUCTO DE DOS MONOMIOS

Se multiplica los signos, luego los coeficientes y, por último, las partes literales, de acuerdo a la teoria de exponentes.

2) PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS

Se puede utilizar cualesquiera de los dos métodos siguientes:

- **Método normal.-** Se ordena los dos polinomios en forma descendente y se escribe uno debajo del otro. A continuación, se multiplica cada uno de los términos del multiplicador por cada uno de los términos del multilplicando, sus signos, sus coeficientes y sus letras; se obtiene los productos parciales, los cuales se escribe en forma ordenada uno debajo del otro del mismo grado y se suma ordenadamente, obteniendose finalmente el producto total.

  Ejemplo:

  $$(x^3 + 3x^2 - 5x + 1)\ (x + 3)$$

  Solución:

  $$\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ x \ + 3 \\ \hline x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x \\ \qquad 3x^3 + 9x^2 - 15x + 3 \\ \hline x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \end{array}$$

- **Método de coeficientes separados.-** Se ordena descendentemente los coeficientes del multiplicando y multiplicador, escribiendolos en línea horizontal, uno debajo del otro. Se efectúa las operaciones como en el caso anterior, corriendo un lugar a la derecha despúes de cada producto parcial; para obtener el grado del producto se aplica la propiedad respectiva.

  Este método es recomendable para polinomios de una sola variable. En caso de faltar una potencia de la variable, se completa con el coeficiente "cero", tanto en el multiplicando como en el multiplicador.

  Ejemplo:

  $$(4x^3 + 7x^2 - 6)\ (2x^2 - 3x - 4)$$

  completando el multiplicando, se escribe:

  $$(4x^3 + 7x^2 + 0x - 6)\ (2x^2 - 3x - 4)$$

  Solución:

  Se toma sólo los coeficientes:

  $$\begin{array}{lrrrrrrrrr} & 4 & + & 7 & + & 0 & - & 6 & & \\ & 2 & - & 3 & - & 4 & & & & \\ \hline & 8 & + & 14 & + & 0 & - & 12 & & \\ & & - & 12 & - & 21 & + & 0 & + & 18 \\ & & & & - & 16 & - & 28 & + & 0 & + & 24 \\ \hline \text{Sumando:} & 8 & + & 2 & - & 37 & - & 40 & + & 18 & + & 24 \end{array}$$

  Grado del producto: 3 + 2 = 5

  El producto final es, por consiguiente:

  $$8x^5 + 2x^4 - 37x^3 - 40x^2 + 18x + 24$$

PRODUCTOS NOTABLES

Son denominados también "identidades algebraicas". Su desarrollo se conoce fácilmente por una simple observación, ya que obedecen a una ley. Lo más importantes son:

1) Cuadrado de una suma o una diferencia:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \,.\, a \,.\, b + b^2$$

2) Producto de una suma por su diferencia:

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

3) Cuadrado de un trinomio:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \,.\, a \,.\, b + 2 \,.\, a \,.\, c + 2 \,.\, b \,.\, c$$

4) Cubo de una suma o de una diferencia:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \,.\, a^2 \,.\, b + 3 \,.\, a \,.\, b^2 \pm b^3$$

5) Producto de dos binomios que tienen un término común:

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + a \,.\, b$$

6) Producto de un binomio por un trinomio que da una suma o diferencia de cubos:

$$(a \pm b)\ (a^2 \mp a \cdot b + b^2) = a^3 \pm b^3$$

7) Identidades de LEGENDRE:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\ (a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4 \cdot a \cdot b$$

8) Identidades de LAGRANGE:

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (x^2 + y^2)\ (a^2 + b^2)$$

$$(ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (cy - bz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\ (x^2 + y^2 + z^2)$$

DIVISIÓN ALGEBRAICA

Consiste en averiguar cuántas veses una cantidad, que se llama divisor (d), está contenida en otra, que se llama dividendo (D). El dividendo y el divisor son los términos de la división y el resultado es el cociente (q). Si la división no es exacta existe un resto (r).

Expresión general:

$$D = q \cdot d + r$$

Cuando la división es exacta: $r = 0$

entonces : $D = q \cdot d$

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

1º En toda división, el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,|$$

2º En toda división el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor.

$$°|\,D\,| \geq °|\,r\,|$$

3º En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del resto (excepto polinomios homogéneos).

$$°|\,d\,| \geq °|\,r\,|$$

4º En toda división el grado máximo del resto es igual al grado del divisor menos uno.

$$°|r_{(máx)}| = °|\,d\,| - 1$$

En el caso de división de polinomios homogéneos, no se cumple esta propiedad.

5º En el caso de polinomios homogéneos, el grado del resto es mayor que el grado del divisor.

$$°|\,r\,| > °|\,d\,|$$

CASOS EN LA DIVISIÓN

DIVISIÓN DE DOS MONOMIOS

Se procede en el siguiente orden:

Se divide los signos mediante la regla de signos.

Se divide los coeficientes.

Se divide los laterales aplicando "teoría de exponentes".

Ejemplo:

$$\frac{-16x^4y^8z^5}{4x^2y^5z^4} = -4x^2y^3z$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Existe los siguientes métodos:

a) MÉTODO NORMAL

1. Se ordenan los polinomios, generalmente en forma descendente.
2. Se escribe éstos en línea horizontal, uno a continuación del otro y utlizando el signo de la división aritmética.
3. Se divide el primer termino del dividendo, entre el primer término del divisor, lo cual da el primer término del cociente.
4. Este primer término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se resta de los correspondiente términos del dividendo.(se cambian de signo los productos).

5. Se incorpora al residuo, el siguiente término del divisor. Se divide el primer término del resto obtenido, entre el primer término del divisor y se obtiene el segundo término del cociente.

6. Se procede como el paso 4, y así sucesivamente, hasta terminar la división.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +\ 5x^2y & -\ 26xy^2 & +\ 33y^3 & 2x^2 - 3xy + y^2 \\
-6x^3 & +\ 9x^2y & -\ 3xy^2 & & 3x + 7y \\
\hline
 & 14x^2y & -\ 29xy^2 & +\ 33y^3 & \\
 & -14x^2y & +\ 21xy^2 & -\ 7y^3 & \\
\hline
 & & -8xy^2 & +\ 26y^3 &
\end{array}
$$

El cociente es: $3x + 7y$

El resto es: $8xy^2 + 26y^3$

b) MÉTODO DE COEFICIENTES SEPARADOS

Además de las consideraciones del método normal, debe tenerse en cuenta que:

1. Se trabaja solamente con los coeficientes y sus signos.

2. En caso de faltar un término, se coloca en su lugar cero, tanto en el dividendo como en el divisor.

3. Se procede a dividir estos coeficientes siguiendo los pasos del método normal, de esta manera se obtiene los coeficientes del cociente con sus signos.

4. Para determinar el grado del cociente y el resto se aplica las siguientes propiedades:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,|$$

$$°|\,r\,| = °|\,d\,| - 1$$

5. Este método es recomendable para polinomios de una sola variable.

Ejemplo:

$$6x^5 - 20x^4 - 13x^3 + 25x^2 - 12x + 7$$

$$: 3x^2 - x + 1$$

Procedimiento:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
6 & -\ 20 & -\ 13 & +\ 25 & -\ 12 & +\ 7 & & 3 - 1 + 1 \\
-6 & +\ 2 & -\ 2 & & & & & 2 - 6 - 7 + 8 \\
\hline
 & -\ 18 & -\ 15 & +\ 25 & & & & \\
 & +\ 18 & -\ 6 & +\ 6 & & & & \\
\hline
 & & -\ 21 & +\ 31 & -\ 12 & & & \\
 & & +\ 21 & -\ 7 & +\ 7 & & & \\
\hline
 & & & +\ 24 & -\ 5 & +\ 7 & & \\
 & & & -\ 24 & +\ 8 & -\ 8 & & \\
\hline
 & & & & +\ 3 & -\ 1 & &
\end{array}
$$

Grado del cociente:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,| = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \qquad q = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 8$$

Grado del resto:

$$°|\,r\,| = °|\,d\,| - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \qquad r = 3x - 1$$

c) MÉTODO DE HORNER

Es un caso particular del método de coeficientes separados y se emplea para la división de polinomios de cualquier grado. Se procede así:

1. Se escribe los coeficientes del dividendo en una fila de izquierda a derecha con su propio signo.

2. Se escribe los coeficientes del divisor en una columna de arriba hacia abajo, a la izquierda del primer término del dividendo; el primero de ellos con su propio signo y los restantes con signos cambiados.

3. El primer término del dividendo se divide entre el primer término del divisor, obteniendose el primer término del cociente, el cual se anota en la última fila del cuadro.

4. Se multiplica este término del cociente solamente por los términos del divisor a los cuales se les cambio su signo, colocándose los resultados a partir de la segunda columna a la derecha.

5. Se reduce la siguiente columna (efectuando la operación indicada) y se coloca este resultado en la parte superior para dividirlo entre el primer coeficiente del divisor y obtener el segundo termino del cociente.(en el ejemplo: +14 - 2 = +12).

6. Se multiplica este cociente por los términos del divisor a los cuales se cambio de signo, colocándose los resultados a partir de la tercera columna a la derecha.

7. Se continúa este procedimiento hasta obtener un término debajo del último término del dividendo, separando inmediatamente los términos del cociente y resto. El número de términos del resto está dado por el número de términos que tiene el último paso.

8. Se suma verticalmente obteniendose los coeficientes del residuo. El grado del cociente y del resto se obtiene tal como se indicó en el Método de Coeficientes separados.

Ejemplo:

$$8x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 3x + 2 : 4x^2 + x + 3$$

Solución:

Grado del cociente:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,| = 5 - 2 = 3$$

Grado del residuo:

$$°|\,r\,| = °|\,d\,| - 1 = 2 - 1 = 1$$

Procedimiento:

	12 - 4 + 8	
4	8 + 14 + 5 + 16	+ 3 + 2
-1	- 2 - 6	
	- 3 - 9	
	+ 1	+ 3
		- 2 - 6
	2 + 3 - 1 + 2	4 - 4
	cociente	resto

Cociente: $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

Resto: $R(x) = 4x - 4$

d) MÉTODO O REGLA DE RUFFINI

Este método se utiliza para dividir polinomios cuando el divisor es un binomio de primer grado. Se presenta tres casos:

1º Cuando el divisor es de forma $(x \pm b)$

2º Cuando el divisor es de la forma $(ax \pm b)$

3º Cuando el divisor es de la forma $(ax^n \pm b)$

1er. Caso. Forma del divisor: $x \pm b$

1. Se escribe los coeficientes del dividendo en línea horizontal. Completando previamente, si fuese necesario.

2. Se ecribe el término independiente del divisor, con signo cambiado, un lugar a la izquierda y un lugar abajo del primer coeficiente del dividendo.

3. Se divide como en el caso de Horner, teniendo presente que el primer coeficiente del cociente, es igual al primer coeficiente del dividendo.

4. Para obtener los coeficientes del cociente, se separa la última columna, la cual costituye el resto.

Ejemplo:

$$4x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8 : x + 1$$

Procedimiento:

	4	- 5	+ 6	+ 7	+ 8				
-1	↓	- 4	+ 9	- 15	+ 8				
	4	- 9	+ 15	- 8	+ 16	← resto			
	coeficientes del cociente								

Grado del cociente:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,| = 4 - 1 = 3$$

∴ Cociente: $4x^3 - 9x^2 + 15 - 8$

Resto: 16

2do. Caso. Forma del divisor: a . x ± b

1. Se transforma el divisor a la primera forma, sacando en factor común el primer coeficiente del divisor:

$$ax \pm b = a\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$$

2. Se divide entre $\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$ operando como el primer caso.

3. Los coeficientes del cociente obtenido son divididos entre el coeficiente de "x" del divisor.

4. El resto obtenido no se altera.

Ejemplo:

$$18x^5 - 29x^3 - 5x^2 - 12x - 16 \div 3x + 2$$

Procedimiento:

Factorizando el denominador:

$$3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 18 & -\ 0 & -\ 29 & -\ 5 & -\ 12 & -\ 16 & \\
-\frac{2}{3} & \downarrow & -\ 12 & +\ 8 & +\ 14 & -\ 6 & +\ 12 & \\
\hline
 & \underbrace{18 \quad -\ 12 \quad +\ 21 \quad +\ 9 \quad -\ 18}_{\text{coeficientes del cociente por 3}} & & & & & \boxed{-\ 4} & \leftarrow \text{resto}
\end{array}$$

Grado del cociente:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,| = 5 - 1 = 4$$

Verdaderos coeficientes del cociente:

$$\frac{18 - 12 - 21 + 9 - 18}{3} = 6 - 4 - 7 + 3 - 6$$

∴ Cociente:

$$q = 6x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 6$$

Resto: $r = -4$

3er. Caso. Forma del divisor: a . x^n ± b

La resolución sólo es posible por el método de Ruffini cuando los exponentes de la variable del dividendo son multiplos enteros de la variable del divisor. El procedimiento se explica a travéz del siguiente ejemplo:

$$6x^{36} + 17x^{27} - 16x^{18} + 17x^9 + 12 \div 3x^9 + 1$$

Procedimiento:

1. Se observa que los coeficientes de la variable del dividendo sean múltiplos del exponente de la variable del divisor.

2. Se factoriza el divisor:

$$3\left(x^9 + \frac{1}{3}\right)$$

3. Se divide como en el primer caso.

4. Cada uno de los coeficientes del cociente obtenido, se divide entre coeficiente de "x" del divisor.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 6 & +\ 17 & -\ 16 & +\ 17 & +\ 12 & \\
-\frac{1}{3} & \downarrow & -\ 2 & -\ 5 & +\ 7 & -\ 8 & \\
\hline
 & \underbrace{6 \quad +\ 15 \quad -\ 21 \quad +\ 24}_{\text{coeficientes del resto por 3}} & & & & \boxed{+\ 4} & \leftarrow \text{resto}
\end{array}$$

Grado del cociente:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,| = 36 - 9 = 27$$

Verdaderos coeficientes del cociente:

$$\frac{6 + 15 - 21 + 24}{3} = 2 + 5 - 7 + 8$$

∴ Cociente: $2x^{27} + 5x^{18} - 7x^9 + 8$

Resto: +4

TEOREMA DEL RESTO

Consiste en hallar el resto de una división sin realizar la división.

"El resto de dividir un polinomio en "x", racional y entero, entre un binomio de la forma (a . x ± b), es igual al valor numérico que adquiere dicho polinomio cuando se reemplaza en él x por ∓ b/a.

REGLA: Para hallar el resto se procede así:

1) Se iguala el divisor a cero:

$$a \cdot x \pm b = 0$$

2) Se despeja "x"

$$x = \frac{\mp b}{a}$$

3) Se reemplaza en el polinomio dividendo la variable "x" por:

$$\mp \frac{b}{a}$$

se efectua operaciones, el resultado es el valor del resto.

$$r = P\left(\mp \frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Hallar el resto:

$$6x^4 + 3x^3 - 19x^2 + 14x - 15 : 2x - 3$$

Procedimiento:

1º $\quad 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

2º $\quad r = P\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 19\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{3}{2}\right) - 15$

$r = -3$

DIVISIBILIDAD Y COCIENTES NOTABLES

La finalidad es determinar polinomios desconocidos dadas ciertas condiciones.

PRINCIPIOS DE DIVISIBILIDAD

1º Para determinar la suma de los coeficientes de un polinomio, se iguala la variable o variables a 1.

Suma de coeficientes de:

$P(x ; y) = P(1 ; 1)$

Ejemplo:

$$P(x, y) = 3x^3 - 2x^2y - 5xy^2 + y^3$$

$$SP\ (1 ; 1) = 3(1)^3 - 2(1)^2(1) - 5(1)(1)^2 + (1)^3$$

$$SP\ (1 ; 1) = -3$$

2º El término independientemente se determina haciendo igual a cero la variable a la cual se refiere el polinomio.

Término independiente = P(0)

Ejemplo:

$$P(x) = 5x^3 + 2x^2y - 6xy^2 - 8y^3$$

Desde el punto de vista de la variable x:

$$P(0) = 5(0)^3 + 2(0)^2y - 6(0)y^2 - 8y^3$$

$$P(0) = -8y^3$$

por otra parte, para la variable y:

$$P(0) = 5x^3 + 2x^2(0) - 6x(0)^2 - 8(0)^3$$

$$P(0) = 5x^3$$

3º Si un polinomio es divisible separadamente entre dos o más binomios será divisible entre el producto de ellos.

Si: $\quad P(x) : (x - a), r = 0$

$P(x) : (x - b), r = 0$

$P(x) : (x - c), r = 0$

Luego se tendrá:

$$P(x) \div (x - a)\ (x - b)\ (x - c),\ r = 0$$

4º Viceversa, si un polinomio es divisible entre un producto de varios factores, binomios, será divisibles separadamente por cada uno de ellos.

5º En general, si al dividendo y al divisor se le multiplica por una misma cantidad, el resto queda multiplicado por dicha cantidad.

$$\boxed{D \,.\, m = d \,.\, m \,.\, q + r \,.\, m}$$

6º Si al dividendo y divisor se divide por una misma cantidad, el resto queda dividido por dicha cantidad.

$$\boxed{\frac{D}{m} = \frac{d}{m}\, q + \frac{r}{m}}$$

COCIENTES NOTABLES (CN)

Se denomina cociente notable, aquel cociente que no requiere efectuar operaciones para conocer su resultado, porque obedece a ciertas reglas fijas.

FORMA GENERAL DE LOS COCIENTES NOTABLES

$$\boxed{\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a}}$$

Se denota en 4 casos:

1er. Caso: es CN $\Leftrightarrow$ "m" es impar.

$$\frac{x^m + a^m}{x + a}$$

2do. Caso: es CN $\Leftrightarrow$ "m" es par.

$$\frac{x^m - a^m}{x + a}$$

3er. Caso: no es CN para cualquier valor de "m".

$$\frac{x^m + a^m}{x - a}$$

4to. Caso: es CN para cualquier valor de "m".

$$\frac{x^m - a^m}{x - a}$$

REGLA PRÁCTICA PARA DESARROLLAR CUALQUIER COCIENTE NOTABLE

1) El primer término del cociente es igual al cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor.

2) El último término del cociente es igual al cociente entre el segundo término del dividendo y el segundo término del divisor.

3) A partir del segundo término del cociente el exponente de "x" comienza a disminuir de 1 en 1 hasta "cero".

4) A partir del segundo término del cociente, aparece el segundo término "a" con exponente "1" y comienza a aumentar de 1 en 1 hasta "m - 1".

5) Los signos varían así:

- Cuando el divisor es de la forma "x + a" los signos de los términos del cociente son alternados (+) (-), comenzando con (+).
- Cuando el divisor es de la forma "x - a" los signos de los términos del cociente son todos positivos.

Ejemplo:

i) 1er. Caso:

$$\frac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$$

ii) 2do. Caso:

$$\frac{x^6 - a^6}{x + a} = x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5$$

iii) 3er. Caso:

$$\frac{x^7 + a^7}{x - a} = \text{No es CN}$$

iv) 4to. Caso:

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$$

HALLAR UN TERMINO CUALQUIERA "K" DE UN COCIENTE NOTABLE

$$\boxed{t_K = (\text{signo})\ x^{m-K}\ a^{K-1}}$$

REGLA PARA EL SIGNO:

1) Cuando el divisor es de la forma(x - a), el signo de cualquier término es positivo.

2) Cuando el divisor es de la forma(x + a), los signos son alternadamente positivos y negativos, empezando por positivo.

Por consiguiente, los terminos de lugar par: son negativos, y los términos de lugar impar: son positivos.

Ejemplo:

Hallar los términos t_{10} y t_{15} en el desarrollo del C.N. siguiente:

$$\frac{x^{150} - a^{100}}{x^3 + a^2}$$

Previamente, se busca darle la forma de cociente notable:

$$\frac{(x^3)^{50} - (a^2)^{50}}{(x^3) + (a^2)} = \frac{y^{50} - b^{50}}{y + b}$$

Trabajamos con la forma original de la izquierda:

Término K = 10: $t_{10} = -(x^3)^{50-10}\,(a^2)^{10-1}$
(par)

$$t_{10} = -x^{120}\,a^{18}$$

Término K = 15: $t_{15} = +(x^3)^{50-15}\,(a^2)^{15-1}$
(impar)

$$t_{15} = +x^{105}\,a^{28}$$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EL COCIENTE $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ SEA NOTABLE

Será notable si:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} = \frac{(x^p)^r \pm (a^q)^r}{x^p \pm a^q}$$

ésto es: $p \,.\, r = m \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m}{p} \quad (a)$

$q \,.\, r = n \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n}{q} \quad (b)$

Es decir, será notable $\Leftrightarrow \frac{m}{p} = \frac{n}{q}$
es número entero

Además:

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{número de términos del cociente notable.}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^{16} + a^{32}}{x^2 + a^4}$$

$$\text{\# de términos} = \frac{16}{2} = \frac{32}{4} = 8$$

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

Factorización es la operación que tiene por objeto transformar una expresión algebraica racional y entera en otra equivalente que sea igual al producto de sus factores primos racionales y enteros.

Los principales métodos para factorizar son los siguientes:

A. FACTOR COMÚN

El factor común de dos o más expresiones algebraicas es la parte numérica y/o literal que está repetida en cada una de dichas expresiones. El factor común puede ser de tres tipos:

- Factor común monomio
- Factor común polinomio
- Factor común por agrupación

A.1) FACTOR COMÚN MONOMIO

Cuando el factor común en todos los términos es un monomio.

Ejemplo:

$$P(,x\,y) = 72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}\,y^{b+1} + 24x^a y^{2b}$$

El factor común es $24x^a y^b$, de este modo:

$$P(x, y) = 24x^a y^b\,(3x^a + 2xy + y^b)$$

A.2) FACTOR COMÚN POLINOMIO

Cuando el factor común que aparece es un polinomio.

Ejemplo:

$$(a + 1)^7 (a^2 + 1)^{10} - (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{11}$$

El factor común es:

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10}$$

luego:

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} [(a + 1)^2 - (a^2 + 1)]$$

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} [a^2 + 2a + 1 - a^2 - 1]$$

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} (2a)$$

$$2a(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10}$$

A.3) FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN

Sea:

$$x^{m+n} + y^{m+n} + (xy)^m + (xy)^n$$

Efectuando operaciones:

$$x^m x^n + y^m y^n + x^m y^m + x^n y^n$$

agrupando:

$$(x^m x^n + x^m y^m) + (y^m y^n + x^n y^n)$$

factoricemos cada paréntesis:

$$x^m(x^n + y^m) + y^n(y^m + x^n)$$

el factor común es el paréntesis, así:

$$(x^n + y^m) (x^m + y^n)$$

B. MÉTODO DE IDENTIDADES

B.1) DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^{2m} - b^{2n}$$

o:

$$(a^m)^2 - (b^n)^2$$

$$\therefore \quad (a^m + b^n) (a^m - b^n)$$

B.2) SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS

SUMA

$$(a^{3m} + b^{3n}) = (a^m)^3 + (b^n)^3$$

se trata de un producto notable:

$$= (a^m + b^n) (a^{2m} - a^m b^n + b^{2n})$$

DIFERENCIA

$$(a^{3m} - b^{3n}) = (a^m)^3 - (b^n)^3$$

$$= (a^m - b^n) (a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})$$

B.3) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$a^{2m} \pm 2a^m b^m + b^{2n} = (a^m \pm b^n)^2$$

C. MÉTODO DEL ASPA

C.1) ASPA SIMPLE

Se usa para factorizar trinomios de la forma:

$$ax^{2n} \pm bx^n \pm c$$

o, de la forma:

$$x^{2n} \pm bx^n \pm c$$

PROCEDIMIENTO.-

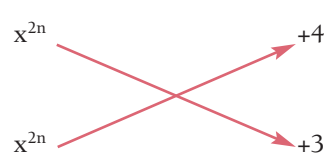
Se descompone en dos factores al primer término, ax^{2n} o x^{2n}, según sea el caso. Se coloca estos factores en las puntas de la izquierda del aspa. El término independiente, incluyendo el signo, también se descompone en dos factores, los que se coloca en las puntas de la derecha del aspa. Los factores de la expresión dada son la suma horizontal de arriba y la suma horizontal de abajo. El término central debe ser igual a la suma de los productos en aspa.

Ejemplo: $x^{4n} + 7x^{2n} + 12$

1) x^{4n} en dos factores: $x^{2n} . x^{2n}$

2) 12 en dos factores: 4 . 3

Se coloca los factores en la punta izquierda y derecha del aspa:



3) El término central es la suma de los productos en aspa.

$$3x^{2n} + 4x^{2n} = 7x^{2n}$$

4) Los factores son las sumas horizontales de arriba y abajo.

Luego:

$$x^{4n} + 7x^{2n} + 12 = (x^{2n} + 4)\ (x^{2n} + 3)$$

C.2) ASPA DOBLE

Se usa para factorizar polinomios de la forma:

$$ax^{2n} \pm bx^n y^n \pm cy^{2n} \pm dx^n \pm ey^n \pm f$$

y también para algunos polinomios de 4to. grado.

PROCEDIMIENTO.-

Se ordena en forma decreciente para una de las variables; luego, se traza y se ejecuta un aspa simple para los tres primeros términos con trazo continuo. A continuación y, pegada al primer aspa, se traza otro, de tal modo que el producto de los elementos del extremo derecho de este aspa multiplicados verticalmente sea el término independiente.

1er. factor: suma de los elementos tomados horizontales de la parte superior.

2do. factor: suma de los elementos tomados horizontalmente de la parte inferior.

Ejemplo:

$$12x^2 - 7xy - 10y^2 + 59y - 15x - 63$$

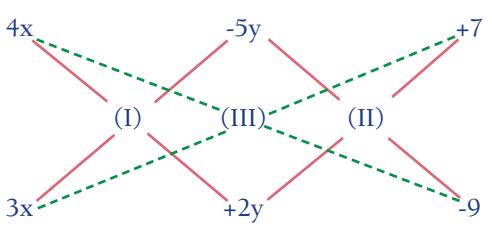
Tomando los tres primeros términos:

1) $12x^2$ en dos factores: $4x\ .\ 3x$

2) $-10y^2$ en dos factores: $-5y\ .\ 2y$

Tomando el último término:

3) -63 en dos factores: $-9\ .\ 7$



Verificando dos términos:

(I)
$$\begin{array}{r} 8xy \\ -15xy \\ \hline -7xy \end{array}$$
2do. término

(II)
$$\begin{array}{r} 45y \\ 14y \\ \hline +59y \end{array}$$
4to. término

(III)
$$\begin{array}{r} -36x \\ +21x \\ \hline -15x \end{array}$$
5to. término

Luego, la expresión factorizada es:

$$(4x - 5y + 7)\ (3x + 2y - 9)$$

D. MÉTODO DE EVALUACIÓN O DE DIVISIORES BINOMIOS

Este método se aplica a polinomios de una sola variable que se caracterizan por anularse para algunos de los divisores de su término independiente afectado de doble signo, o alguna combinación.

Ejemplo: Factorizar

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

Solución:

Los números de prueba son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$$

Los números fraccionarios tienen como numerador los divisores del término independiente y como denominador los divisores del coeficiente del término de mayor grado.

para $x = -1$

$$P(x) = 2 + 1 - 9 - 4 + 4 \neq 0$$

$\therefore$ no es divisor

para $x = 1$

$$P(-1) = 2 - 1 - 9 + 4 + 4 = 0$$

$\therefore$ Un divisor es: $(x + 1)$

para x = 2

$$P(2) = 32 + 8 - 36 - 8 + 4 = 0$$

$\therefore$ Otro divisor o factor es: $(x - 2)$

Dividiendo P(x) sucesivamente entre los factores obtenidos por el método de Ruffini:

	2	+	1	-	9	-	4	+	4
-1		-	2	+	1	+	8	-	4
	2	-	1	-	8	+	4		0
2		+	4	+	6	-	4		
	2	+	3	-	2		0		

Despues de la división se obtiene:

$$P(x) = (x + 1)\ (x - 2)\ (2x^2 + 3x - 2)$$

$$P(x) = (x + 1)\ (x - 2)\ (2x - 1)\ (x + 2)$$

E. METÓDO DE ARTIFICIOS DE CÁLCULO

E.1) REDUCCIÓN A DIFERENCIA DE CUADRADOS

Consiste en sumar y restar una misma cantidad a la expresión dada para transformarla en una diferencia de cuadrados.

Ejemplo: Factorizar:

$$E = a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$$

Sumando y restando $4a^2b^2$:

$$E = a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4 - 4a^2b^2$$

$$E = (a^2 + 3b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$E = (a^2 + 3b^2)^2 - (2ab)^2$$

$$E = (a^2 + 3b^2 + 2ab)\ (a^2 + 3b^2 - 2ab)$$

SUMAS Y RESTAS

Consiste en sumar y restar una misma cantidad de tal manera que se forme una suma o una diferencia de cubos y se presenta al factor $x^2 + x + 1$ o $x^2 - x + 1$.

Ejemplo: Factorizar:

$$P(x) = x^5 + x^4 + 1$$

1ra. Forma: Sumando y restando

$$x^3 + x^2 + x:$$

$$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^3 - x^2 - x$$

$$P(x) = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1)$$

$\therefore$ $P(x) = (x^2 - x + 1)\ (x^3 + 1 - x)$

2da. Forma: Sumando y restando x^2:

$$P(x) = x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

$$P(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$$

Sumando y restando x^2 al segundo paréntesis, factorizando y tambien factorizando el primer paréntesis.

$$P(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1)$$

$$P(x) = (x^2 + x + 1)\ (x^3 - x^2 + x^2 - x + 1)$$

$\therefore$ $P(x) = (x^2 + x + 1)\ (x^3 - x + 1)$

CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en cambiar una variable por otra, de manera que se obtenga una forma de factorización conocida, o que tenga una forma más simple.

Ejemplo: Factorizar:

$$P(x) = 1 + x(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3)$$

Agrupando así:

$$P(x) = 1 + [x(x + 3)][(x + 1)\ (x + 2)]$$

Efectuando:

$$P(x) = 1 + (x^2 + 3x)\ (x^2 + 3x + 2)$$

Haciendo $x^2 + 3x = y$

$$P(x) = 1 + y(y + 2)$$

$$P(x) = 1 + 2y + y^2$$

es el desarrollo de una suma al cuadrado:

$$P(x) = (1 + y)^2$$

sustituyendo la variable:

$$P(x) = (1 + 3x + x^2)^2$$

FACTORIZACIÓN RECÍPROCA

POLINOMIO RECÍPROCO

Es aquel que cuyos coeficientes equidistantes de los extremos son iguales.

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A$$

Ejemplo: Factorizar el polinomio:

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

PROCEDIMIENTO

Se factoriza x^2:

$$P(x) = x^2 \left(6x^2 + 5x + 6 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

Ordenando así:

$$P(x) = x^2 \left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6\right]$$

Haciendo: $x + \frac{1}{x} = y$

entonces:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

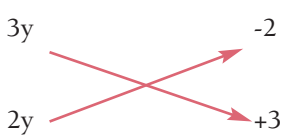
sustituyendo:

$$P(x) = x^2 \left[6(y^2 - 2) + 5y + 6\right]$$

Efectuando:

$$P(x) = x^2 (6y^2 + 5y - 6)$$

Factorizando el paréntesis por el aspa simple:



$$\therefore \quad P(x) = x^2(3y - 2)(2y + 3)$$

Reponiendo "x":

$$P(x) = x^2 \left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]\left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\right]$$

$$P(x) = x^2 \left[\frac{3x^2 + 3 - 2x}{x}\right]\left[\frac{2x^2 + 2 + 3x}{x}\right]$$

$$\therefore \quad P(x) = (3x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 3x + 2)$$

FACTORIZACIÓN SIMÉTRICA ALTERNADA

POLINOMIO SIMÉTRICO

Un polinomio es simétrico, con respecto a sus variables, cuando su valor no se altera por el intercambio de cualquier par de ellas, y además es homogéneo.

Ejemplo:

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + xz + yz)$$

Notar que las operaciones con expresiones simétricas dan como resultado también expresiones simétricas.

POLINOMIO ALTERNO

Un polinomio es alterno, con respecto a sus variables, cuando su signo se altera, pero no su valor absoluto, al intercambiar un par cualquiera de ellas, y además es homogéneo.

Ejemplo:

$$y^2(z - y) + x^2(y - z) + z^2(x - y)$$

PROPIEDADES DE LAS EXPRESIONES Y DE LOS POLINOMIOS SIMÉTRICOS Y ALTERNOS

1º No hay expresiones alternas que contengan más de 2 variables y sean de primer grado.

2º Generalmente los polinomios alternos son circulares o cíclicos y están escritos en forma de diferencia.

3º El producto de una expresión simetrica por una alterna da como resultado una expresión alterna.

4º Una expresión simétrica o alterna de variables x, y, z, si es divisible entre "x", entonces también será divisible entre "y" y entre "z".

5º En una expresión simétrica o alterna, de variables, x, y, z, si es divisible entre $(x \pm y)$, entonces también será divisible entre $(x \pm z)$ $(y \pm z)$.

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO SIMÉTRICO Y ALTERNADO

1) Se averigua si el polinomio es simétrico o alterno.

2) Encontrar los factores de la expresión aplicando el teorema del resto y aplicando las propiedades del polinomio simétrcio y alterno.

3) Plantear el cociente, planteando la identidad de dos polinomios y ampliarlo aplicando el criterio de los valores numéricos.

Ejemplo: Factorizar:

$$P(x) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

PROCEDIMIENTO

1) Intercambiando x por y, se ve que la expresión es alterna.

2) Cálculo de los factores x = y

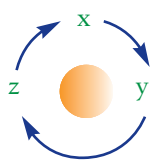
$$P(x) = (y - y)^3 + (y - z)^3 + (z - y)^3$$

$$= 0 + (y - z)^3 + [-(y - z)^3]$$

$$P(x) = (y - z)^3 - (y - z)^3 = 0$$

Luego el polinomio es divisible entre (x - y)

Por ser polinomio alterno, también será divisible entre los factores obtenidos en forma circular en el sentido indicado:



Haciendo $\begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases}$

Es decir entre: $(y - z) \wedge (z - x)$

El polinomio es divisible entre el producto:

$$(x - y)\ (y - z)\ (z - x)$$

3) Se plantea la identidad de los polinomios:

$$\underbrace{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}_{\text{3er. grado}}$$

$$= \underbrace{(x - y)\ (y - z)\ (z - x)}_{\text{3er. grado}} \quad \underbrace{Q}_{\text{grado cero}}$$

Si Q es de grado cero quiere decir que es un número.

Dando un juego de valores para x, y, z; se obtiene el valor de Q:

Para x = 1 ; y = 2 ; z = 3:

$$(1 - 2)^3 + (2 - 3)^3 + (3 - 1)^3$$

$$= Q\ (1 - 2)\ (2 - 3)\ (3 - 1)$$

$$(-1) + (-1) + (8) = Q(2)$$

$$\therefore \quad Q = 3$$

Luego, la expresión factorizada es:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

$$= 3\ (x - y)\ (y - z)\ (z - x)$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de mayor grado posible, que está contenida como factor un número entero de veses en dichas expresiones. Para determinar el M C D se factoriza las expresiones comunes con su menor exponente.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de menor grado posible, que contiene un número entero de veces como factor dichas expresiones.

Para determinar el m c m se factoriza las expresiones y se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo:

Hallar el MCD y el m c m de:

$$A = x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)\ (y + z)\ (y - z)$$

$$B = x^4 + 2x^2z^2 + z^4 - y^4$$

PROCEDIMIENTO

Efectuando:

$$A = x^4 + 2x^2y^2 + (y^2 + z^2)\ (y^2 - z^2)$$

$A = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - z^4$

$A = (x^2 + y^2)^2 - (z^2)^2$

$A = (x^2 + y^2 + z^2)\ (x^2 + y^2 - z^2)$

Mientras que:

$B = (x^4 + 2x^2y^2 + z^4) - y^4$

$B = (x^2 + z^2)^2 - (y^2)^2$

$B = (x^2 + z^2 + y^2)\ (x^2 + z^2 - y^2)$

$MCD\ (A, B) = x^2 + y^2 + z^2$

$mcm\ (A, B) = (x^2 + y^2 + z^2)\ (x^2 + y^2 - z^2)\ (x^2 + z^2 - y^2)$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Se denomina fracción algebraica a toda aquella expresión que tiene por lo menos una letra en el denominador.

Ejemplos:

i) $\dfrac{2}{3x}$

ii) $\dfrac{2a + b}{3c + 1}$

iii) $2ax^{-2}y^3z^{-1}$

CAMBIOS DE SIGNO EN UNA FRACCIÓN

1) CUANDO NO HAY PRODUCTOS INDICADOS

Se puede cambiar dos de sus tres signos y la fracción no se altera.

Ejemplo:

$$F = +\frac{+(m + 1)}{+(n + q)} = -\frac{-(m + 1)}{+(n + q)}$$

$$= -\frac{+(m + 1)}{-(n + q)} = +\frac{-(m + 1)}{-(n + q)}$$

2) CUANDO LA FRACCIÓN TIENE PRODUCTOS INDICADOS

En toda fracción, si se cambia de signo a un número par de factores, la fracción no cambia de signo; si se cambia de signo a un número impar de factores, la fracción sí cambia de signo.

Ejemplo:

$$F = \frac{(a - b)(c - d)}{(e - f)(g - h)}$$

$$F = \frac{-(b - a)(c - d)}{-(f - e)(g - h)} = \frac{(a - b)(c - d)}{(e - f)(g - h)} \quad \text{par}$$

$$F = \frac{-(b - a)(c - d)}{(f - e)(g - h)} \neq \frac{(a - b)(c - d)}{(e - f)(g - h)} \quad \text{impar}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Para simplificar fracciones se factoriza.

Ejemplo: Simplificar:

$$P(x) = \frac{x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b}{x^3 + ax^2 + 2bx^2 + b^2x + 2abx + ab^2}$$

Ordenando y factorizando:

$$P(x) = \frac{x(x^2 + 2ax + a^2) + b(x^2 + 2ax + a^2)}{x(x^2 + 2bx + b^2) + a(x^2 + 2bx + b^2)}$$

$$P(x) = \frac{x(x + a)^2 + b(x + a)^2}{x(x + b)^2 + a(x + b)^2} = \frac{(x + a)^2(x + b)}{(x + b)^2\ (x + a)}$$

$$P(x) = \frac{x + a}{x + b}$$

BINOMIO DE NEWTON

DEFINICIÓN

Es el desarrollo de un binomio elevado a la potencia "n".

ANÁLISIS COMBINATORIO

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Factorial de un número "n" es el producto de los número consecutivos desde "1" hasta "n". Se denota así: $\lfloor n$

o así: n!

Ejemplos:

i) $\lfloor 5$, se lee factorial de 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5

ii) n!, se lee el factorial de n = 1 . 2 . 3 ... . (n - 1)n

PROPIEDADES DE LOS FACTORIALES

1º Si $\lfloor n$ existe, el valor de "n" es entero y positivo.

2º $\lfloor 0 = 1$ y $\lfloor 1 = 1$

3º Si el factorial de un número es igual al factorial de otro, entonces los números son iguales.

Sí: $\lfloor a = \lfloor b$

$\therefore \quad a = b$

4º Debe tenerse en cuenta que:

$$\lfloor a \pm b \neq \lfloor a \pm \lfloor b$$

$$\lfloor a \,.\, b \neq \lfloor a \,.\, \lfloor b$$

$$\lfloor \frac{a}{b} \neq \frac{\lfloor a}{\lfloor b}$$

VARIACIONES

Cada una de las ordenaciones, coordinaciones o arreglos que puede formarse tomando algunos o todos de un número de objetos, se llama una variación diferenciándose entre ellas bien en un objeto o bien en una diferente ordenación de los objetos.

De este modo, las variaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r" se puede hallar con la siguiente fórmula:

$$V_r^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n - r}$$

Ejemplo:

En un campeonato deportivo, participan los equipos a, b, c, d y e. Si los partidos son realizados tanto en la sede de cada uno ("casa o "local"), como en la sede del otro equipo ("visitante"). ¿Cuántos partidos se jugara en total?.

Se trata de hallar cuantas variaciones se puede formarse de 2 en 2.

$$V_2^5 = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 5 - 2} = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 3} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 20$$

PERMUTACIONES

Se llama permutaciones de "n" objetos a los diferentes grupos que con ellos se puede formar, de manera que participando "n" objetos en cada grupo, difieren solamnente en el orden de colocación.

$$P_n = \lfloor n$$

Ejemplo:

Hallar el número de permutaciones de las letras a, b, c, d.

$$P_4 = \lfloor 4 = 24$$

COMBINACIONES

Se llama así a los diferentes grupos que se puede formar con "n" elementos tomándolos todos a la vez o de "r" en "r", de manera que los grupos se diferencien por lo menos en un elemento. Para determinar el número de combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r", se usa la siguiente fórmula:

$$C_r^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \, \lfloor n - r}$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras se pueden combinar las vocales a, e, i, o, u tomadas de 2 en 2?

$$C_2^5 = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2 \, \lfloor 5 - 2} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10$$

PROPIEDADES DE LAS COMBINACIONES

1º COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS

Se dice que 2 combinaciones son complementarias cuando el número de combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r" es igual al número de combinaciones de "n" elementos tomados de "n - r" en "n - r".

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

2º SUMA DE COMBINACIONES

$$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$$

3º PROPIEDAD SOBRE LOS ÍNDICES

Si C_r^n existe, luego:

a) "n" y "r" son números enteros y positivos

b) $n > r$

4º DEGRADACIÓN DE ÍNDICES

Consiste en descomponer un número conbinatorio en otro que tenga igual índice superior, pero índice inferior disminuyendo en 1.

$$C_r^n = \frac{n - r + 1}{r} = C_{r-1}^n$$

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON $(x + a)^n$

Para exponente entero y positivo "n"

MÉTODO INDUCTIVO

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b$$

$$(x + a)(x + b)\ (x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + a \cdot b \cdot c$$

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ (x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d + c \cdot d)x^2 + (a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot d + b \cdot c \cdot d + a \cdot c \cdot d)x + a \cdot b \cdot c \cdot d$$

Por lo tanto, para "n" factores:

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ \ldots\ (x + k) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + P_n$$

S_1 = Suma de las letras: $a + b + c + \ldots + k$

S_2 = Suma de los productos de las "n" letras tomadas de 2 en 2.

S_3 = Suma de los productos de las "n" letras tomadas de 3 en 3.

P_n = Producto de todas las "n" letras.

Si: $a = b = c = \ldots = k \Rightarrow$

$$S_1 = C_1^n\, a = \left(\frac{n}{1}\right) a = n \cdot a$$

$$S_2 = C_2^n\, a^2 = \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2}\, a^2$$

$$S_3 = C_3^n\, a^3 = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^3$$

y así, sucesivamente. Además:

$$P_n = a^n$$

Finalmente:

$$(x + a)^n = x^n + C_1^n\, x^{n-1}\, a + C_2^n\, x^{n-2}\, a^2 + C_3^n\, x^{n-3}\, a^3 + \ldots + a^n$$

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot a + \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2}\, a^2 \cdot x^{n-2} + \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^3 \cdot x^{n-3} + \ldots + a^n$$

Ejemplo:

Desarrollar $(x + a)^4$.

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^{4-1}\, a + \frac{4(4 - 1)}{1 \cdot 2}\, a^2\, x^{4-2} + \frac{4(4 - 1)(4 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^3\, x^{4-3} + a^4$$

$$(x + 4)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

PROPIEDADES DEL BINOMIO DE NEWTON

1º Su desarrollo es un polinomio completo de (n + 1) términos.

2º Los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales.

3º El exponente de "x" en cada término es igual al número de términos que le siguen y el de "a" al que le preceden.

4º El coeficiente del primer término es 1 y el coeficiente del segundo término es igual al exponente del primer término.

5º El coeficiente de cada término es igual al anterior multiplicando por el exponente del "x' anterior y dividido por el del "a" anterior y aumentando en 1.

6º Si los términos del binomio tienen signos contrarios, los términos del desarrollo serán alternativamente positivos y negativos, siendo negativos los que contengan potencias impares del término negativo del binomio. Basta sustituir en el dearrollo "a" por "-a".

7º Si los dos términos del binomio son negativos, todos los términos del desarrollo serán positivos o negativos, según que el exponente sea par o impar. En efecto:

$$(-x - a)^n = [(-1)\ (x + a)]^n$$
$$= (-1)^n\ (x + a)^n$$

8º La suma de los coeficientes del desarrollo es igual a 2 elevado a la potencia del binomio.

$$2^n = 1 + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n$$

9º La suma de los coeficientes de los términos de lugar impar es igual a la suma de los de lugar par.

10º Con respecto a las letras "x" y "a", el desarrollo es un polinomio homogéneo de grado "n".

CÁLCULO DE TERMINO GENERAL $t_{(k+1)}$

k = lugar del término anterior al buscado

$$\boxed{t_{k+1} = C_k^n \cdot x^{n-k} \cdot a^k}$$

Ejemplo:

Hallar el término 10 del desarrollo de:

$$\left(27x^5 + \frac{1}{3x}\right)^{12}$$

PROCEDIMIENTO:

Nótese que: n = 12

1er. término: $27x^5$

2do. término: $\frac{1}{3x}$

$$t_{10} = t_{9+1} = C_9^{12}\,(27x^5)^{12-9}\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$t_{10} = \frac{12\ .\ 11\ .\ 10}{1\ .\ 2\ .\ 3}\,(3^3x^5)^3(3^{-9}x^{-9})$$

$$t_{10} = 220x^6$$

TÉRMINO CENTRAL

Se presenta 2 casos:

1) Cuando el exponente es par, de la forma $(x + a)^{2n}$, existe un sólo término central, su lugar se calcula así:

$$\boxed{\frac{2n}{2} + 1 = n + 1}$$

Notar que, en este caso 2n es la potencia del binomio.

2) Cuando el exponente es impar, de la forma: $(x + a)^{2n+1}$, existen 2 términos centrales, y sus lugares se determinan así:

1er. Término Central = $\boxed{\frac{(2n + 1) + 1}{2} = n + 1}$

2do. Término Central = $\boxed{\frac{(2n + 1) + 3}{2}\ n + 2}$

Notar que la potencia del binomio es (2n + 1)

TÉRMINO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Permite determinar los coeficientes de desarrollo del binomio . Se escribe en forma horizontal los coeficientes del desarrollo de las sucesivas potencias del binomio, resulta un triángulo aritmético que se llama Pascal o Tartaglia.

Coeficientes de:

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = 1 \quad 1$

$(x + a)^2 = 1 \quad 2 \quad 1$

$(x + a)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$(x + a)^4 = 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$(x + a)^5 = 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

y así sucesivamente.

Ejemplo:

Desarrollar $(x^3 + y^4)^5$

PROCEDIMIENTO

Utilizando el triángulo de Pascal, los coeficientes del binomio a la 5ta. son:

$$1 \; ; \; 5 \; ; \; 10 \; ; \; 10 \; ; \; 5 \; ; \; 1$$

Luego:

$$(x^3 + y^4)^5 = (x^3)^5 + 5(x^3)^4 (y^4) + 10(x^3)^3 (y^4)^2 + 10(x^3)^2 (y^4)^3 + 5(x^3) (y^4)^4 + (y^4)^5$$

$$(x^3 + y^4)^5 = x^{15} + 5x^{12}y^4 + 10x^9y^8 + 10x^6y^{12} + 5x^3y^{16} + y^{20}$$

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO

PROPIEDADES:

1º El número de términos es infinito, y al desarrollo se le conoce con el nombre de "Serie Binómica de Newton".

2º Para determinar el desarrollo de $(x + a)^n$ para un número "n" fraccionario y/o negativo, el valor de "x" debe ser uno y además $x > a$. Los valores de a deben estar en el rango $0 < a < 1$.

3º Los términos del desarrollo con respecto a sus signos, no guardan ninguna relación.

4º Para extraer la raíz de un número con aproximación por la serie binómica de Newton, se utiliza la siguiente relación:

$$(1 + x)^{1/m} = 1 + \frac{1}{m} x$$

donde: $0 < x < 1$

Ejemplo: Hallar $\sqrt[5]{921,6}$

Se puede escribir:

$$\sqrt[5]{1\,024 - 102,4} = \sqrt[5]{1\,024\left(1 - \frac{102,4}{1\,024}\right)}$$

$$= \sqrt[5]{1024}\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{5}} = 4\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}\right)$$

$$= 4\,(1 - 0,02) = 4(0,98) = 3,92$$

$$\therefore \quad \sqrt{921,6} = 3,92$$

5º Para determinar el término general en el desarrollo se utiliza:

$$\boxed{t_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)}{\lfloor k} x^{n-k} a^k}$$

Donde:

n = exponente negativo y/o fraccionario

k = lugar del término anterior al pedido

Ejemplo:

Hallar el término 2 del desarrollo de $(1 - x)^{-3}$

$$t_{1+1} = \frac{(-3)}{\lfloor 1 \; \lfloor 4} x^{3-1} (1)^1$$

$$t_2 = -3x^2$$

RADIACIÓN

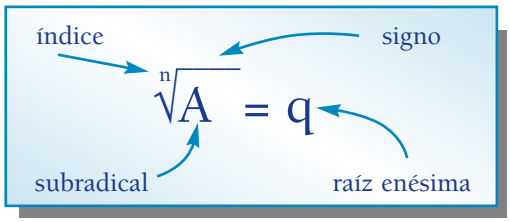
DEFINICIÓN

Es la operación que consiste en hallar una cantidad algebraica llamada raíz, que al ser elevada a un cier-

to índice, reproduce una cantidad llamada radicando o cantidad subradical. Es la operación contraria a la potenciación.

$$\sqrt[n]{A} = q \quad \Rightarrow \quad A = q^n$$

ELEMENTOS DE UNA RAÍZ



SIGNO DE LAS RAÍCES

$$\sqrt[2n]{(+)} = (\pm)$$

$$\sqrt[2n]{(-)} = \text{imaginario}$$

$$\sqrt[2n+1]{(+)} = (+)$$

$$\sqrt[2n+1]{(-)} = (-)$$

Donde: 2n = número par

2n + 1 = número impar

RADICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

RAÍZ DE UN MONOMIO

REGLA:

1) Se extrae la raíz del signo, de acuerdo con la ley de signos de un radical.
2) Se extrae la raíz del coeficiente.
3) Se divide los exponentes de las letras entre el índice de la raíz.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{-32x^{10}y^{20}z^{-5}} = -2x^{\frac{10}{5}}\,y^{\frac{20}{5}}\,z^{\frac{-5}{5}} = -2x^2y^4z^{-1}$$

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

REGLA:

1) Se ordena y completa el polinomio; luego, se agrupa los términos de 2 en 2, empezando por la derecha.
2) Se halla la raíz cuadrada del primer término (monomio o binomio) del primer grupo de la izquierda, que sera el primer término de la raíz cuadrada del polinomio. Se multiplica esta raíz por sí misma, se cambia de signo y se suma al polinomio dado, eliminándose la primera columna.
3) Se baja los términos que forman el siguiente grupo, se duplica la raíz hallada y se divide el primer término de los bajados entre este duplo. El cociente así hallado es el segundo término de la raíz. Este segundo término de la raíz, con su propio signo, se escribe al lado derecho del duplo del primer término de la raíz formándose un binomio, este binomio se multiplica por dicho segundo término con signo cambiado, sumándose este producto a los dos términos que se habia bajado.
4) Se baja el siguiente grupo de términos. Se duplica la parte de la raíz ya hallada y se divide el primer término del resíduo entre el primero de este duplo, el cociente es el tercer término de la raíz. Este tercer término con su propio signo se escribe al lado del duplo de la raíz hallada y se forma un trinomio, este trinomio se multiplica por dicho tercer término de la raíz con signo cambiado y este producto se suma al resíduo.
5) Se continúa el procedimiento anterior, hasta obtener un resto, cuyo grupo sea una unidad menor que el grado de la raíz o un polinomio idénticamente nulo.

Ejemplo:

$\sqrt{4x^6 - 4x^5 + 13x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 6x + 1}$	$2x^3 - x^2 + 3x - 1$
$-4x^6$	$2\,(2x^3) = 4x^3$
$- 4x^5 + 13x^4$	$(4x^3 - x^2)\ (+x^2)$
$+ 4x^5 - x^4$	$2\,(2x^3 - x^2) = 4x^3 - 2x^2$
$+ 12x^4 - 10x^3 + 11x^2$	$(4x^3 - 2x^2 + 3x)\ (-3x)$
$- 12x^4 + 6x^3 - 9x^2$	$2\,(2x^3 - x^2 + 3x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x$
$- 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$	$(4x^3 - 2x^2 + 6x - 1)\ (+1)$
$+ 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1$	
$- \quad - \quad - \quad -$	

RAÍZ CÚBICA DE UN POLINOMIO

REGLA:

1) Se ordena y completa el polinomio, se separa en grupos de tres términos, emprezando por la drecha.

2) Se extrae la raíz cúbica del primer término del primer grupo de la izquierda (puede estar formado por uno, dos o tres términos), que será el primer término de la raíz, este término se eleva al cubo y se resta del primer término del polinomio dado.

3) Se baja el siguiente grupo formado por los tres términos siguientes del polinomio y se divide el primero de ellos entre el triple del cuadrado de la raíz hallada, el cociente de esta división es el segundo término de la raíz.

4) Se forma 3 productos:

- El triple del cuadrado del primer término de la raíz.
- El triple del primer término de la raíz por el cuadrado del segundo término de la raíz.
- El cubo del segundo término de la raíz.

Se suma los resultados obtenidos, se cambia de signo y se le suma a los tres términos del polinomio que se habia bajado.

5) Se baja el siguiente grupo de términos, dividiéndose el primer término del residuo entre el triple del cuadrado del primer termino de la raíz, el cociente es el tercer término de la raíz.

Se forma 3 grupos:

- El triple del cuadrado de la raíz hallada (1º y 2º término) por el tercer término de la raíz.
- El triple de la raíz hallada por el cuadrado del tercer término de la raíz.
- El cubo del tercer término de la raíz.

Se suma los productos obtenidos, se cambia de signo sus términos y se les suma a los términos del resíduo. Se continúa hasta obtener como residuo un polinomio cuyo grado sea una unidad menor que el doble del grado de la raíz.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1}$	$x^2 - 2x + 1$
$-x^6$	$3\,(x^2)^2 = 3x^4$
$-6x^5 + 15x^4 - 20x^3$	$(-6x^5) : (3x^4) = -2x$
$+6x^5 - 12x^4 + 8x^3$	a) $3\,(x^2)^2\,(-2x) = -6x^5$
$+3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1$	b) $3\,(x^2)\,(-2x)^2 = +12x^4$
$-3x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 6x - 1$	c) $(-2x)^3 = -8x^3$
- - - - -	$= 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$
	$(3x^4) : (3x^4) = 1$
	a) $3\,(x^2 - 2x)^2\,(1) = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2$
	b) $3\,(x^2 - 2x)\,(1)^2 = 3x^2 - 6x$
	c) $(1)^3 = 1$
	$= 3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

DESCOPOSICIÓN DE RADICALES DOBLES EN SIMPLES

A) Forma:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+K}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-K}{2}}}$$

Donde: $K = \sqrt{A^2 - B}$

Ejemplo: Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

PROCEDIMIENTO:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{A+K}{2}} + \sqrt{\frac{A-K}{2}} \qquad (I)$$

Cálculo de K:

$$K = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{3^2 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

Sustituyendo en (1):

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

B) Forma:

$$\boxed{\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

Ejemplo:

Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}$$

PROCEDIMIENTO:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado:

$$10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

Identificando las partes racionales e irracionales:

$$x + y + z = 10 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{x \cdot y} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad x \cdot y = 6 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{x \cdot z} = 2\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad x \cdot z = 10 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{y \cdot z} = 2\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad y \cdot z = 15 \qquad (4)$$

Multiplicando: (2) por (3) por (4):

$$x^2y^2z^2 = (3 \cdot 2)(5 \cdot 2)(5 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\therefore \quad x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad (5)$$

Sustituyendo (2) en (5): $z = 5$

Sustituyendo (3) en (5): $y = 3$

Sustituyendo (4) en (5): $x = 2$

$$\therefore \sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

C) Forma:

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$$

Se procede igual que la forma anterior.

D) Forma:

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}$$

Llamando:

$$C = \sqrt[3]{A^2 - B}$$

$$y = x^2 - C$$

Se resuelve $A = 4x^3 - 3xC$ por tanteos para "x".

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$$

PROCEDIMIENTO:

Primero: $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = x + \sqrt{y}$

Ahora cálculo deC:

$$C = \sqrt[3]{7^2 - 50} = -1$$

Sustituyendo valores en:

$$A = 4x^3 - 3xC$$
$$7 = 4x^3 - 3x\,(-1)$$
$$7 = 4x^3 + 3x$$

Donde por tanteo:

$$x = 1$$

Sustituyendo valores en:

$$y = x^2 - C$$
$$y = 1^2 - (-1)$$
$$y = 2$$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

OPERACIONES CON RADICALES

CONCEPTOS BÁSICOS

RADICALES HOMOGÉNEOS

Son aquellos que tienen iguales índices.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{x^4z^2}\ ;\ \sqrt[5]{y^2x}\ ;\ \sqrt[5]{x}$$

HOMOGENIZACIÓN DE RADICALES

Es la operación que se realiza para pasar radicales de distinto índice, a radicales de índice iguales.

Ejemplo:

Homogenizar:

$$\sqrt[3]{a^2b}\ ;\ \sqrt[4]{b^3}\ ;\ \sqrt[5]{c^4d}$$

PROCEDIMIENTO:

1) Se halla m c m de los indices; éste será el índice común.

$$\text{mcm: } 3, 4, 5 = 60$$

2) Se afecta del índice común y se eleva cada cantidad subradical a un exponente que resulta de dividir el índice común entre su índice original.

$$\sqrt[60]{(a^2b)^{\frac{60}{3}}}\ ;\ \sqrt[60]{(b^3)^{\frac{60}{4}}}\ ;\ \sqrt[60]{(c^4d)^{\frac{60}{5}}}$$

efectuando las operaciones se obtiene:

$$\sqrt[60]{a^{40}b^{20}}\ ;\ \sqrt[60]{b^{45}}\ ;\ \sqrt[60]{c^{48}b^{12}}$$

RADICALES SEMEJANTES

Son aquellos qie tienen igual índice e igual radicando.

Ejemplo:

$$3x\sqrt[3]{3b}\ ;\ 8y\sqrt[3]{3b}\ ;\ 2\sqrt[3]{3b}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES

Si se multiplica o divide el índice del radical y el radicando por un mismo número, no varía el valor aritmético, pero el número de valores algebraicos de las posibles raízes queda multiplicado o dividido por ese mismo número:

Sea:

$$\sqrt[n]{B^m} = b$$

multiplicando índice y exponente por "r":

$$\sqrt[n.r]{B^{m.r}}$$

notar que:

$\sqrt[n]{B^m}$ tiene "n" raíces

$\sqrt[n.r]{B^{m.r}}$ tiene "n . r" raíces

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON RADICALES

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para sumar radicales semejantes basta sacar como factor común el radical; si no son semejantes, se deja indicado.

Ejemplo:

$$3x\sqrt[3]{3b} + 8y\sqrt[3]{3b} + 2\sqrt[3]{3b} = \sqrt[3]{3b}\,(3x + 8y + 2)$$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

1) Cuando son homogéneos:

$$\sqrt{A}\ .\ \sqrt{B} = \sqrt{A\ .\ B}$$

2) Cuando tienen índices distintos.

Se reduce a un índice común y se opera igual que en el caso anterior, así:

$$\sqrt[p]{x}\ .\ \sqrt[q]{y} = \sqrt[pq]{x^q}\ .\ \sqrt[pq]{y^p} = \sqrt[pq]{x^qy^p}$$

DIVISIÓN DE RADICALES

1) Cuando son homogéneos:

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

2) Cuando son homogéneos.

Previamente se homogeniza y se procede como se indicó en el caso anterior:

$$\frac{\sqrt[p]{A}}{\sqrt[q]{B}} = \frac{\sqrt[pq]{A^q}}{\sqrt[pq]{B^p}} = \sqrt[pq]{\frac{A^q}{B^p}}$$

POTENCIAL DE RADICALES

$$\left(\sqrt[n]{B}\right)^p = \sqrt[n]{B^p}$$

RAÍZ DE RADICALES

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[nm]{B}$$

FRACCIÓN IRRACIONAL

Es aquella cuyo denominador tiene raíz algebraica.

RACIONALIZACIÓN

Es una operacion que consiste en modificar un quebrado en cuyo denominador hay una raíz algebraica (fracción irracional) y transformarla a otra que no tenga raíz en el denominador.

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R.)

El factor racionalizante de una expresión irracional es también otra expresión irracional que, multiplicada por la primera, la convierte en una expresión racional.

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR DE UNA FRACCIÓN

PRIMER CASO

Cuando la fracción presenta, en el denominador, radicales en forma de producto.

Ejemplo:

Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[5]{b^3}}$

PROCEDIMIENTO:

Se multiplica numerador y denominador por el literal elevado a un exponente igual a lo que le falta al exponente del literal para equivaler a la unidad.

De este modo:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[5]{b^3}} = \frac{1}{a^{1/4}\,.\,b^{3/5}} \cdot \frac{a^{3/4}\,.\,b^{2/5}}{a^{3/4}\,.\,b^{2/5}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}\,.\,\sqrt[5]{b^2}}{a\,.\,b}$$

SEGUNDO CASO

Cuando la fracción presenta en su denominador una suma de raíces algebraicas; para racionalizar, se utiliza el criterio denominado como la conjugada real.

Ejemplo:

i) Racionalizar: $\dfrac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

ii) Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}} = \frac{1}{\left[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a+b}\right]} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{\left[\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{2\sqrt{a\,.\,b}} \cdot \frac{\sqrt{a\,.\,b}}{\sqrt{a\,.\,b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a\,.\,b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})}{2\,.\,a\,.\,b}$$

TERCER CASO

Cuando la fracción presenta en su denominador una suma algebraica de radicales de índice superior a 2. Se procede así:

- Si el índice es una potencia de 2, se utiliza el criterio de la conjugada en forma sucesiva.
- Si el índice es 3, es necesario tener en cuenta las siguientes identidades:

$$a + b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

$$a - b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

Ejemplo:

Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$

Solución:

Multiplicando por la conjugada y luego aplicando las identidades anteriores se logra racionalizar:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}} = \frac{1}{\left(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}\right)} \cdot \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a - b}$$

CUARTO CASO

Si el índice es mayor que 3, y pertenece a una de las formas:

1) $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a^{n-1}} \mp \sqrt[n]{a^{n-2}\,b} + \sqrt[n]{a^{n-3}\,b^2}$

$$\mp \sqrt[n]{a^{n-4}}\,b^3 + \ldots \mp \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

Previamente, debe recordarse que para todo valor de "n":

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

Sin embargo, para valores impares de "n":

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{n}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a + b$$

y, para valores pares de "n":

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

Uno de los factores es utilizado como el F.R.
Ejemplo: Racionalizar:

$$\frac{N}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

Si al denominador se le multiplica por $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$, se obtiene x - y, por consiguiente el factor racionalizante es $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$.

$$E = \frac{N\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)}{x - y}$$

VERDADERO VALOR DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

CONCEPTOS

FRACCIONES DETERMINADAS

Son la siguientes:

$$\frac{a}{0}, \frac{0}{a}, \frac{\infty}{a}, \frac{a}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \frac{0}{\infty}$$

Estas formas determinadas son definidas como:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a}{x} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{a} = \infty$

4) $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ x \to 0}} \dfrac{x}{a} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{a} = 0$

6) $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ x \to 0}} \frac{a}{x} = \infty$

La expresión: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x}$

Se lee: "limite de la fracción $\frac{a}{x}$ cuando "x" tiende a cero".

VERDADERO VALOR(V.V.)

Cuando para ciertos valores de la variable, una expresión adquiere muchos valores, se dice que la expresión es de la forma indeterminada. Por esta razón, se busca su "verdadero valor", siendo éste el valor de otra que sea su equivalente. A este procedimiento se denomina "llevar indeterminación.

FORMAS INDETERMINADAS

Matemáticamente, no son definibles:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ \ \infty - \infty\ ,\ 0 \cdot \infty\ ,\ 1^{\infty}\ ,0^{0}$$

CÁLCULO DEL VERDADERO VALOR

A) FORMA $\frac{0}{0}$

Para levantar esta inderminación debe tenerse en cuenta que tanto en el numerador como en el denominador está el factor cero, que se debe de eliminar, por lo tanto:

- Se factoriza el numerador y el denominador buscando el factor cero (por ejemplo: x - a = 0, cuado "x" tiende a "a").
- Se simplifica en el numerador y denominador de la fracción este factor.
- Se sustituye nuevamente x = a. Si persiste la indeterminación, se repite hasta hallar el verdadero valor.

Ejemplo:

Hallar el verdadero valor de la fracción:

$$E = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + x - 12}\ ,\ \text{para } x = 3$$

PROCEDIMIENTO:

$$E = \frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{(3)^2 + (3) - 12} = \frac{0}{0}$$

Esta forma es indeterminada, quiere decir que en el numerador y en el denominador hay un factor de la forma "x - a". Hay que factorizarlo y luego simplificarlo.

1) Factorizando:

$$E = \frac{(2x + 1)\ (x - 3)}{(x + 4)\ (x - 3)}$$

ese factor es: "x - 3"

2) Simplificando:

$$E = \frac{2x + 1}{x + 4}$$

3) Para x = 3:

$$E = \frac{2(3) + 1}{3 + 4} = \frac{7}{7} = 1$$

$\therefore$ V.V.(E) = 1

B) FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Para levantar la indeterminación de esta forma, se divide numerador y denominador entre la máxima potencia de la variable cuya presencia provoca la indeterminación.

REGLA PRÁCTICA:

1) Si el numerador es de mayor grado que el denominador, el V.V. es ∞ ; es decir:

si: $°|N| > °|D| \Rightarrow$ V.V.(E) = ∞

2) Si el numerador es de menor grado que el denominador. el V.V. es 0, es decir:

si: $°|N| < °|D| \Rightarrow$ V.V.(E) = ∞

3) Si el numerador y el denominador son de igual grado, el V.V. es un cociente formado por los coeficientes de los términos de máxima potencia del numerador y denominador; es decir:

si: $°|N| = °|D|$, entonces:

$$\text{V.V.(E)} = \frac{\text{Coeficiente de mayor grado de N}}{\text{Coeficiente de mayor grado de D}}$$

Ejemplo:

Hallar el V.V. de la fracción:

$$E = \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 7}{6x^3\ 2x^2 + 5x\ \ + 1}\ ;\ \text{para } x \to \infty$$

Sustituyendo x por ∞:

$$E = \frac{2(\infty) + 3(\infty) + 3(\infty) + 7}{6(\infty) + 2(\infty) + 5(\infty) + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para levantar la indeterminación se divide de numerador y denominador entre la variable elevada a su mayor exponente:

$$E = \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{6 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Para (x + ∞):

$$V.V.(E) = \frac{2 + 0 + 0 + 0}{6 + 0 + 0 + 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

C) FORMA ∞ - ∞

Cuando se presenta esta forma de indeterminación, se lleva a la forma ∞/∞ y se procede como tal.

Ejemplo:

Hallar el V.V. de:

$$E = \sqrt{2x^2 + 3x + 1} - x\sqrt{2} \text{ ; cuando } x \to \infty$$

Sustituyendo:

$$E = \sqrt{2(\infty) + 3(\infty) + 1} - \infty\sqrt{2} = \infty - \infty$$

Para levantar esta indeterminación se multiplica y divide por la conjugada de la expresión:

$$E = \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}\right)}$$

Efectuando:

$$E = \frac{2x^2 + 3x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}}$$

Dividiendo numerador y denominador entre x:

$$E = \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$$

Para x → ∞:

$$V.V.\ (E) = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

D) FORMA 0 . ∞

Cuando una expresión algebraica toma la forma 0 . ∞, su V.V. se obtiene efectuando primero las operaciones indicadas y, luego, simplificando y reemplazando x = a. Si subsiste la indeterminación, se transforma a una de las formas anteriores y se procede.

Ejemplo:

Hallar el verdadero valor de:

$$E = \left(\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{3x - 1}\right)\left(\frac{7}{x^2 + 6x - 16}\right)$$

para: x = 2

Procedimiento:

Para x = 2, se obtiene 0 . ∞(forma indeterminada)

Efectuando operaciones:

$$E = \left[\frac{3x - 1 - x - 3}{(x + 3)(3x - 1)}\right]\left[\frac{7}{(x + 8)(x - 2)}\right]$$

$$= \left[\frac{2(x - 2)}{(x + 3)(3x - 1)}\right]\left[\frac{7}{(x + 8)(x - 2)}\right]$$

Simplificando (x - 2):

$$E = \frac{14}{(x + 3)(3x - 1)(x + 8)}$$

para: x = 2:

$$V.V.\ (E) = \frac{14}{(5)\ (5)\ (10)} = \frac{7}{125}$$

CANTIDADES IMAGINARIAS

CONCEPTOS

DEFINICIÓN

Cantidades imaginarias son las raíces de índice par de cantidades negativas:

Ejemplos:

i) $\sqrt{-3}$

ii) $\sqrt[6]{-5}$

iii) $\sqrt[8]{-64}$

UNIDAD IMAGINARIA

Según la notación de Gauss:

$$\sqrt{-1} = i$$

de donde: $i^2 = -1$

Ejemplo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{-1} = 4i$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

1) $i^1 = (\sqrt{-1})^1 = i$

2) $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

3) $i^3 = i^2 \,.\, i = -i$

4) $i^4 = i^2 \,.\, i^2 = 1$

5) $i^5 = i^4 \,.\, i = i$

6) $i^6 = i^4 \,.\, i^3 = -1$

7) $i^7 = i^4 \,.\, i^3 = -i$

8) $i^8 = i^4 \,.\, i^4 = 1$

NÚMEROS COMPLEJOS

Se llama así a un número de la forma "a + bi", donde "a" y "b" son números reales.

COMPLEJOS IGUALES

Son los que tienen iguales sus partes reales e iguales sus partes imaginarias.

Ejemplo:

$$a + bi = c + di$$

$$\Leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad b = d$$

COMPLEJOS CONJUGADOS

Son los que tienen iguales sus partes reales; e iguales, pero de signos contrarios sus partes imaginarias.

Ejemplo:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = a - bi$$

COMPLEJOS OPUESTOS

Son los que tienen iguales sus partes reales e imaginarias, pero de signos contarios.

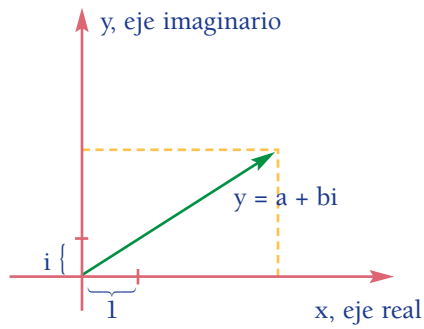
Ejemplo:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = -a - bi$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

1) REPRESENTACIÓN CARTESIANA

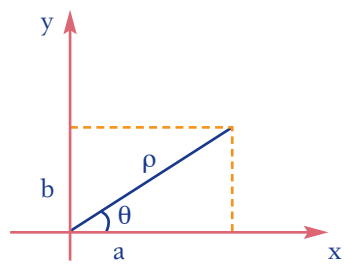


Sea: y = a + bi

Unidad sobre el eje y: i

Unidad sobre el eje x: 1

2) REPRESENTACIÓN POLAR O TRIGONOMÉTRICA



$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$ módulo o radio vector.

$\boxed{\theta = \text{arco tg}\,\frac{b}{a}}$ argumento.

Con apoyo en la figura, la forma polar de a + bi, se calcula así:

$$a + bi = \rho \cos\theta + i\,\rho \operatorname{sen}\theta$$

$$\boxed{a + bi = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$$

Ejemplo:

Expresar en forma polar: 8 + 6i

PROCEDIMIENTO:

Se sabe que:

$$8 + 6i = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Cálculo de ρ y θ:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\theta = \text{arco tg}\,\frac{b}{a} = \text{arco tg}\,\frac{6}{8} = \text{arco tg}\,\frac{3}{4} = 37^\circ$$

$$\therefore\ 8 + 6i = 10\,(\cos 37^\circ + i \operatorname{sen} 37^\circ)$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

1) SUMA

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i}$$

2) MULTIPLICACIÓN

$$(a + bi)\,(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$\therefore\ (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

En forma polar:

$$z_1 = a + bi = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$z_2 = c + di = \rho_2\,(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\,\rho_2\,(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

3) DIVISIÓN

Dividir $z_1 : z_2$, sí:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 - d^2 i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \cdot i$$

Forma polar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]}$$

4) POTENCIA.- Fórmula de Moivre:

$$\boxed{[\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}$$

5) RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right]}$$

Donde K = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1)

DETERMINANTES

MATRIZ

Matriz es una herramienta matemática que permite, en principio, resolver ecuaciones simultáneas de primer grado.

DEFINICIÓN

Matriz es todo arreglo rectangular de elementos del conjunto de números reales, vectoriales, tensores, números complejos, etc. colocados en filas y en columnas perfectamente definidas.

Ejemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$ii)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3i & \sqrt{7} \\ 4 & 9 & 5 & 1/3 \\ \sqrt{2} & 3i & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

DTERMINANTE

DEFINICIÓN

Determinante es el desarrollo de una "matriz cuadrada"; se le representa simbólicamente encerrando la matriz entre dos barras verticales.

ORDEN DEL DETERMINANTE

El "orden" del determinante, como es una matriz cuadrada, está expresado o por el número de "filas" o por el número de "columas" que tiene la matriz.

La "matriz" es "cuadrada" cuando el número de filas es igual al número de columnas.

DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Δ = valor del determinante

elementos del determinante: a_1, a_2, b_1, b_2

COLUMNAS : (a_1b_1) y (a_2b_2)

FILAS : (a_1a_2) y (b_1b_2)

DIAGONAL PRINCIPAL : $(a_1\ b_2)$

DIAGONAL SECUNDARIA : (b_1a_2)

VALOR DEL DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

Es igual a la diferencia de los productos de la diagonal principal y diagonal secundaria.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

diagonal secundaria (-)

(+) diagonal principal

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & +5 \\ +2 & -7 \end{vmatrix} = (-3)(-7) - (+2)(+5) = 21 - 10 = 11$$

DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

Es el desarrollo de una matriz cuadradade 3 filas y 3 columnas.

MÉTODOS PARA HALLAR EL VALOR DE UN DETERMINANTE

Para determinar el valor de determinantes de 3º orden u orden superior, se utiliza la "Regla de Sarrus" o el método de "menores complementarios".

REGLA DE SARRUS

1) Se repite las filas primer y segunda debajo de la tercera.

2) Se toman con signo positivo la diagonal principal y sus paralelasy con signo negativo la diagonal secundaria y sus paralelas.

3) Se efectúan las operaciones con los signos considerados.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Ejemplo: Desarrollar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\Delta = 1 \,.\, 5 \,.\, 9 + 4 \,.\, 8 \,.\, 3 + 7 \,.\, 2 \,.\, (-6) - 7 \,.\, 5 \,.\, 3 - 1 \,.\, 8 \,.\, (-6) - 4 \,.\, 2 \,.\, 9$$

$$\Delta = 45 + 96 - 84 - 105 + 48 - 72$$

$$\Delta = -72$$

FORMA PRÁCTICA
DE LA REGLA DE SARRUS

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

con signo (+)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

con signo (-)

MENOR COMPLEMENTARIO

El menor complementario de un elemento de un determinante, es otro determinante de menor orden, que resulta despúes de suprimir en el determinante los elementos que pertenecen a la fila y la columna de dicho elemento.

Ejemplo:

Escribir el menor complementario del elemento b_2 en el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

Δ_1 = menor complementario de Δ del elemento b_2.

1) Si la suma es par el elemento tiene signo (+).

2) Si la suma es impar el elemento tiene signo (-).

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El elemento "c_2" pertenece a la 3ra. fila: 3 y a la 2da. columna: 2, luego:

$$S = 3 + 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{signo}(-)$$

El elemento "a_3" es de la 1ra. fila: 1y de la 3ra. columna: 3, luego:

$$S = 1 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{signo}(+)$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR MENORES COMPLEMENTARIO

" Todo determinante es igual a la suma algebraica de los productos que se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) por sus respectivos menores complementarios, colocando a cada producto el signo del elemento".

Ejemplo:

Hallar el valor del determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

Desarrollandolo por menores complementarios, tomando la primera fila.

$$\Delta = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 16 & 25 \end{vmatrix} - (4)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 25 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1)(100 - 80) - (4)(75 - 45) + (2)(48 - 36)$$

$$\Delta = 20 - 120 + 24 = -76$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1º Si en un determinante se cambia las filas por columnas y las columnas por filas, el valor de determinante no se altera.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2º Si en un determinante se intercambia entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

3º Si el determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es igual a cero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

4º Si en un determinante se multiplica o divide todos los elementos de una fila o una columna por un mismo número, el determinante queda multiplicado o dividido por este número.

Sea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Si:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} na_1 & a_2 \\ nb_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_1 = n\Delta$$

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

DEFINICIÓN

Ecuación es una igualdad que contiene una o más incognitas.

CLASES DE IGUALDAD

Hay dos clases de igualdad: absoluta y relativa.

A) IGUALDAD ABSOLUTA

Llamada también identidad o igualdad incondicional, es aquella que se verifica para cualquier valor de sus letras.

Ejemplo:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + a \,.\, b$$

B) IGUALDAD RELATIVA o ECUACIÓN

Llamada también igualdad condicional, es aquella que se verifica para algunos valores particulares atribuidos a sus letras, llamadas incognitas.

Ejemplo:

$$3x + 6 = 0$$

se verifica sólo para: $x = -2$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS IGUALDADES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

1er. PRINCIPIO

Si a ambos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo valor, la ecuación no varía.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \pm n = B \pm n$$

2do. PRINCIPIO

Si a ambos miembros de una igualdad se le multiplica o divide por un número independiente de "x", distinto de cero y distinto de infinito, la ecuación no varia.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot n = B \cdot n$$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{n} = \frac{B}{n}$$

$$n \neq 0,\ n \neq \infty$$

3er. PRINCIPIO

Si ambos miembros de una ecuación son elevados a una misma potencia o se les extrae la misma raíz, la ecuación que resulta parcialmente es la misma.

Sea:

$$A = B$$

Si:

$$A^n = B^n \quad ; \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$$

entonces, se puede escribir:

$$A^n - B^n = 0$$

Factorizando por cocientes notables:

$$(A - B)\,(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = 0$$

De esta última igualdad se obtiene, igualando, los factores a cero:

$$A - B = 0 \qquad A = B$$

$$A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1} = 0$$

(Ecuaciones introducida que da soluciones extrañas)

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON INCOGNITA

Son aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$ax + b = 0$$

Solución: $x = -\dfrac{b}{a}$

SISTEMA DE ECUACIONES

Es un conjunto de dos o más ecuaciones verificadas para un mismo juego de valores de las incognitas.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

a) Compatibles:

Cuando el sistema tiene soluciones. A su vez, puede ser:

- Determinadas: Número de soluciones limitado.
- Indeterminadas: Muchas soluciones.

b) Incompatibles:

Cuando el sistema no tiene ninguna solución

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Son aquellas cuyas ecuaciones son de primer grado.

Ejemplo:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: PARA DOS ECUACIONES

De una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas en función de la otra y se sustituye este valor en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita.

El valor de la incógnita obtenida de esta última ecuación se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se obtiene el valor de la segunda incógnita.

Ejemplo:

$$2x + 5y = 26 \qquad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \qquad (2)$$

De (1):

$$x = \frac{26 - 5y}{2}$$

Sustituyendo en (2):

$$3 \cdot \frac{26 - 5y}{2} - 4y = -7$$

$$78 - 15y - 8y = -14$$

$\therefore \; y = 4$

Sustituyendo en (1):

$$2x + 5 \,.\, 4 = 26$$

$\therefore \; x = 3$

2) MÉTODO DE IGUALACIÓN: PARA DOS ECUACIONES

De las dos ecuaciones se despeja una misma incógnita en función de la otra y se iguala ambas, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita; el valor obtenido de esta última ecuación se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se obtiene el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

$$2x + 5y = 26 \qquad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \qquad (2)$$

De (1):

$$x = \frac{26 - 5y}{2}$$

De (2):

$$x = \frac{-7 + 4y}{3}$$

Igualando estas últimas:

$$\frac{26 - 5y}{2} = \frac{-7 + 4y}{3}$$

$\therefore \; y = 4$

Sustituyendo en (1):

$$2x + 5 \,.\, 4 = 26$$

$\therefore \; x = 3$

3) MÉTODO DE REDUCCIÓN: PARA DOS ECUACIONES

Consiste en hacer que los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar en ambas ecuaciones sean iguales, para lo cual se multiplica una de las ecuaciones por el coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación, luego se suman o restan según convenga.

Ejemplo:

$$2x + 5y = 26 \qquad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \qquad (2)$$

Para eliminar "x", se multiplica (1) por 3 y (2) por 2, así:

$$6x + 15y = 78 \qquad (3)$$

$$6x - 8y = -14 \qquad (4)$$

Restando (3) - (4):

$$23y = 92$$

$\therefore \; y = 4$

Sustituyendo en (1): $2x + 5 \,.\, 4 = 26$

$\therefore \; x = 3$

4) MÉTODO DE LOS DETERMINANTES: REGLA DE CRAMER

En todo sistema de ecuciones determinadas, el valor de cada incógnita se puede calcular mediante una fracción, cuyo denominador es el determinante del sistema, siendo el numerador este mismo determinante en el que se ha reemplazado la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes. Así:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta S}} \qquad \boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta S}}$$

Ejemplo:

Resolver: $2x + 5y = 26$

$3x - 4y = -7$

ΔS = determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

Δx = determinante de x:

$$\begin{vmatrix} 26 & 5 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = -104 - (-35) = -69$$

Δy = determinante de y:

$$\begin{vmatrix} 2 & 26 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 78 = -92$$

$$\therefore \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{-69}{-23} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{-92}{-23} = 4$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y ECUACIONES BICUADRATICAS

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecución de segundo grado o cuadrática es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Se resuelve de dos formas:

1) FACTORIZANDO MEDIANTE EL ASPA SIMPLE

Ejemplo: Resolver la ecuación:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$$

PROCEDIMIENTO:

Efectuando, ordenando e igualando a cero:

$$4x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - 4x + 26$$

$$2x^2 + x - 21 = 0$$

Factorizando por aspa:

$$\begin{matrix} 2x & & 7 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{matrix}$$

$$(2x + 7)\ (x - 3) = 0$$

Igualando a cero cada factor:

Si: $2x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -3{,}5$

Si: $x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

2) APLICANDO LA FÓRMULA GENERAL

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se recomienda aplicar cuando la factorización no es inmediata.

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $4x^2 - 5x = 19$

PROCEDIMIENTO:

Igulando a cero:

$$4x^2 - 5x - 19 = 0$$

donde: $a = 4$; $b = -5$; $c = -19$

Aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \,.\, 4 \,.\, (-19)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{329}}{8}$$

de donde se obtiene dos raíces:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{329}}{8}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{329}}{8}$$

DISCUCIÓN DEL VALOR DE LAS RAÍCES

Las raíces de una ecuación de segundo grado dependen de la cantidad sub-radical, llamada "discriminante" o "invariante" y se le representa por la letra griega "delta".

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1) Si $\Delta > 0$, se obtiene dos raíces reales y desiguales.

2) Si $\Delta = 0$, se obtiene dos raíces reales e iguales.

3) Si $\Delta < 0$, se obtiene dos raíces complejas y conjugadas.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1º SUMA DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{b}{a}}$$

2º PRODUCTO DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{c}{a}}$$

3º PARA UNA ECUACIÓN CÚBICA

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

con raíces:

$$x_1, x_2, x_3$$

se cumple:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b$$

$$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = c$$

$$x_1 . x_2 . x_3 = -d$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Si "x_1" y "x_2" son las raíces de una ecuación de segundo grado. la ecuacíon originaria se forma así:

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)\, x + (x_1 . x_2) = 0}$$

Ejemplo:

Sean $x_1 = -4$ y $x_2 = 3$, escribir la correspondiente ecuación de segundo grado.

PROCEDIMIENTO:

$$x^2 - (-4 + 3)\, x + (-4)\,(3) = 0$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$

ECUACIONES BICUADRADAS

Son ecuaciones de 4º grado de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Se resuelve de dos maneras:

a) Factorizando e igualando a cero.

b) Haciendo $x^2 = y$, lo que transforma a la ecuación bicuadrada a una de segundo grado de la forma:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cuyas raíces son:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pero $x^2 = y$, luego $x = \pm\sqrt{y}$; resultando entonces 4 raíces:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_4 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

SUMA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$$

PRODUCTO:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}}$$

PRODUCTOS BINARIOS:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = \frac{b}{a}}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

$$\boxed{x^4 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4)x^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0}$$

Ejemplo:

Sean las raíces $x' = \pm 4$ y $x'' = \pm 2$

¿Cuál es la ecuación bicuadrada)

PROCEDIMIENTO:

Sean: $x_1 = 4$ $\quad x_2 = -4$

$x_3 = 2$ $\quad x_4 = -2$

Luego aplicando la fórmula de cosntrucción:

$$x^4 + [(4)(-4) + (2)(-2)]\, x^2 + (4)(-4)(2)(-2) = 0$$

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

ECUACIONES RECÍPROCAS

Son de la forma:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$

Es decir, sus coeficientes equidistantes del centro son iguales.

Reciben este nombre porque no varían cuando se cambia "x" por su recíproco "1/x".

Ejemplo:

Resolver: $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$

PROCEDIMIENTO:

Se factoriza x^2:

$$x^2\left(6x^2 - 25x + 12 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = 0$$

$$x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12\right] = 0 \quad (A)$$

hacemos:

$$x + \frac{1}{(1)} = y$$

para elevarlo al cuadrado:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$x^2[6(y^2 - 2) - 25y + 12] = 0$$

$$x^2(6y^2 - 25y) = 0$$

$$x^2y(6y - 25) = 0$$

Reponiendo el valor de x:

$$x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left[6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 25\right] = 0$$

Igualando los factores a cero, sólo el último factor arroja resultados válidos:

$$x_1 = 3{,}91098$$

$$x_2 = 0{,}25569$$

ECUACIONES BINOMIAS Y TRINOMIAS

1) BINOMIAS

Son de forma: $\boxed{Ax^n + b = 0}$

Se resuelve factorizando e igualando cada factor a cero o mediante la fórmula de Moivre.

Ejemplo:

$$8x^3 - 27 = 0$$

la cual también se puede escribir también como:

$$(2x)^3 - (3)^3 = 0$$

factorizando:

$$(2x - 3)[(2x)^2 + (2x)(3) + (3)^2] = 0$$

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0$$

Si: $2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2}$

Si: $4x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_2 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{4} \qquad x_3 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{4}$$

2) TRINOMIAS

Son de la forma: $\boxed{Ax^{2n} + Bx^n + C = 0}$

Se resuelve cambiando $x^n = y$, y se transforma en una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

Resolver: $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

PROCEDIMIENTO:

Llamando: $x^4 = y$ (a)

Luego:

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

de donde:

$$y_1 = 16 \;\; ; \;\; y_2 = -1$$

Sustituyendo estos valores en (a): primero, $y = 16$; luego, $y = 1$

1) $x^4 = 16 \Rightarrow (x^4 - 16) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)$
$(x + 2i)(x - 2i) = 0$

De donde:

$$x_1 = -2 \;\; ; \;\; x_2 = 2$$

$$x_3 = -2i \;\; ; \;\; x_4 = 2i$$

2) $x^4 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-1} = i$

ECUACIONES QUE SE RESUELVEN MEDIANTE ARTIFICIO

Mediante el empleo de incógnitas auxiliares se llega a una ecuación de forma conocida.

Ejemplo: Resolver:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 - 2x + 14}} = 2$$

PROCEDIMIENTO:

Obsérvese que las cantidades subradicales son inversamente iguales, luego llamado a:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = y$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 4x + 2}} = \frac{1}{y}$$

$\therefore$ La expresión propuesta se escribe:

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y - 1)^2 = 0$$

de donde:

$$y = 1$$

Con este valor:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2} = 1$$

$$x^2 - 2x + 14 = x^2 + 4x + 2$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

DESIGUALDAD

Es una relación que establece que dos cantidades tienen diferente valor. Los signos usados son:

$>$ mayor que

$<$ menor que

$\leq$ igual o mayor que

$\geq$ igual o menor que

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDADES

1º Si ambos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, la desigualdad no cambia de sentido.

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \pm m > b \pm m$$

2º Si ambos miembros de una desigualdad son multiplicados o divididos por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.

$$a > b$$

también:

$$a \cdot m > b \cdot m \quad \vee \quad \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \text{ ; si } m > 0$$

3º Si ambos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

$$a > b$$

$$\text{si } n < 0 \Rightarrow a \cdot n < b \cdot n \quad \vee \quad \frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

4º Si se suma miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, el resultado es una desigualdad del mismo sentido.

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

5º Si se multiplica o divide miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, cuyos miembros son positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a \cdot c > b \cdot d \end{array} \quad \vee \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

6º Si ambos miembros de una desigualdad son elevados a una misma potencia impar, el sentido de la desigualdad no varía.

$$a > b \quad \Rightarrow \quad a^{2n+1} > b^{2n+1}$$

7º Si ambos miembros de una desigualdad se eleva a una misma potencia par, siendo los dos miembros negativos, se obtiene una desigualdad de signo contrario.

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a^{2n} < b^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad a < 0 \text{ y } b < 0$$

8º Si ambos miembros de una desigualdad se les extrae una misma raíz de índice impar se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$$

CLASES DE DESIGUALDADES

1) ABSOLUTA

Cuando se verifica para cualquier valor de sus letras.

Ejemplo: $(x - 3)^2 + 9 > 0$

2) RELATIVA O INECUACIÓN

Cuando se verifica sólo para valores determinados de sus letras.

Ejemplo: $5x - 9 > 11$

sólo se satisface para $x > 4$.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son de la forma:

$$\boxed{ax \pm b > 0}$$

o:

$$\boxed{ax \pm b < 0}$$

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Es todo valor de la incógnita o conjunto de valores de las incógnitas que verifican la desigualdad.

Las soluciones se expresan en intervalos abiertos o cerrados.

INTERVALO ABIERTO

Es el conjunto de soluciones limitados por los valores a y b, sin incluir estos valores:
Se denota así:

$$\langle a, b \rangle$$

Ejemplo:

El intervalo $\langle 2, 5 \rangle$ significa que x tiene todos los valores entre 2 y 5 pero no incluye a éstos; es decir, los valores son solamente 3 y 4.

INTERVALO CERRADO

Es el conjunto de soluciones limitados por valores a y b, incluyendo a éstos.

Se representa así:

$$[a, b]$$

Ejemplo:

El intervalo [3, 8] significa que x tiene todos los valores entre 3 y 8, inclusive estos valores; es decir, los valores son 3; 4; 5; 6; 7; 8.

VALOR ABSOLUTO

Se representa así: $|x|$

y, se define:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

SISTEMA DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Para resolver este sistema se sigue los siguientes pasos:

(1) Se halla las soluciones de cada inecuación en forma separada.

(2) Se compara, para establecer las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

(3) Se grafica, las soluciones en la recta numérica para facilitar la solución:

Ejemplo:

$$\frac{3x}{4} - 5 > 7 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{2} + 3 > x - 9 \qquad (2)$$

PROCEDIMIENTO:

Con la (1):

$$3x - 20 > 28$$
$$3x > 48$$
$$x > 16 \qquad (3)$$

No incluye al 16

Con la (2):

$$x + 6 > 2x - 18$$
$$-x > -24$$
$$x < 24 \qquad (4)$$

No incluye 24

Solución gráfica:

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$

Se presenta 3 casos:

1er. CASO .- Cuando la inecuación es:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Se factoriza el trinomio. Suponiendo que se puede factorizar así: $p(x - r_1)(x - r_2) > 0$

Para que esta desigualdad se verifique, ambos factores o son positivos o son negativos, y las soluciones serán las siguientes:

(1) si son positivos:

$$x - r_1 > 0 \qquad \therefore x > r_1$$
$$x - r_2 > 0 \qquad \therefore x > r_2$$

(2) si son negativos:

$$x - r_1 < 0 \qquad \therefore x < r_1$$
$$x - r_2 < 0 \qquad \therefore x < r_2$$

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - 7x + 12 > 0$

Procedimiento: factorizando el trinomio:

$$(x - 4)(x - 3) > 0$$

(1) si son positivos:

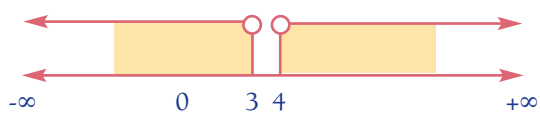
$$x - 4 > 0 \qquad \therefore x > 4$$
$$x - 3 > 0 \qquad \therefore x > 3$$

(2) si son negativos:

$$x - 4 < 0 \qquad \therefore x < 4$$
$$x - 3 < 0 \qquad \therefore x < 3$$

Conclusión:

La solución es: $x > 4 \ \vee \ x < 3$



2do. CASO.- La inecuación es:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Análogamente a la anterior, se factoriza, suponiendo que se puede factorizar así:

$$(x - r_1)(x - r_2) < 0$$

Para que esta desigualdad se verifique, un factor debe ser positivo y el otro negativo y las soluciones serán las siguientes:

Si: $x - r_1 < 0 \Rightarrow x < r_1$

$x - r_2 > 0 \Rightarrow x > r_2$

Si: $x - r_1 > 0 \Rightarrow x > r_1$

$x - r_2 < 0 \Rightarrow x < r_2$

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - 9x + 18 < 0$

Procedimiento: Se factoriza el trinomio:

$$(x - 6)(x - 3) < 0$$

Si: $\left.\begin{array}{l} x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6 \\ x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{array}\right\}$ No hay solución común

Si: $\left.\begin{array}{l} x - 6 < 0 \Rightarrow x < 6 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{array}\right\}$ Solución $3 < x < 6$

En forma de intervalo: $x \in \langle 3; 6 \rangle$

Gráficamente:

3er. CASO.- Cuando la inecuación es $ax^2 + bx + c > 0$ y tiene sus raíces complejas, solamente se verifica para ese sentido porque se trata de una desigualdad absoluta.

Ejemplo:

Resolver: $x^2 + x + 1 > 0$

PROCEDIMIENTO: Se iguala a cero:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\ i}{2} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\ i}{2}$$

Las raíces son complejas. Por otra parte:

$$x^2 + 2\,(x)\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$$

$$x^2 + 2\,(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

expresión que verifica la desigualdad absoluta.

PROGRESIONES

DEFINICIÓN

Son sucesiones de números o términos algebraicos en las cuales cada tres términos consecutivos forma una proporción continua, que puede ser aritmética o geométrica.

A) PROGRESIÓN ARITMÉTICA "P.A." o "POR DIFERENCIA"

Es una sucesión de números en la cual cada uno de ellos se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante que se llama "razón".

Sea la progresión aritmética:

$$: t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$$

Se denota: t_1 = primer término

t_n = término de lugar "n"

r = razón

n = número de términos

S_n = suma de "n" términos.

Por definición:

$$t_n = t_{n-1} + r \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = t_n - t_{n-1}}$$

Una P.A. es creciente cuando la razón es positiva; es decreciente, cuando la razón es negativa.

$r > 0$: creciente

$r < 0$: decreciente

PROPIEDADES

1º Términos cualquiera:

$$t_n = t_1 + (n - 1)\, r$$

2º Las sumas de términos equidistantes de los extremos son iguales.

Sea la P.A.:

$$: t_1, \ldots, t_p, \ldots, t_q, \ldots, t_n$$

$$t_1 + t_n = t_p + t_q$$

(a) Término central:

$$t_c = \frac{t_1 + t_n}{2}$$

(b) Un término cualquiera es media aritmética entre el anterior y el posterior:

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}$$

3º Suma de los "n" primeros términos:

$$S_n = \frac{(t_1 + t_n)n}{2}$$

o:

$$S_n = \frac{[2t_1 + (n - 1)r]n}{2}$$

INTERPOLACIÓN

Es la operación de hallar los términos de una progresión aritmética entre otros dos. Por ejemplo, entre a y b.

Razón para interpolar:

$$r_i = \frac{b - a}{m + 1}$$

Donde:

"a" y "b" son términos dados de una proresión aritmética.

"m" es el número de términos a colocar entre "a" y "b".

Ejemplo:

Interpolar 4 medios aritméticos entre los números 5 y 20.

Razón para interpolar:

$$r_i = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{20 - 5}{4 + 1} = 3$$

La P.A. completa será:

$$: 5 : 8 : 11 : 14 : 17 : 20$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA "P.G." o "POR COCIENTE"

Es una sucesión de números en la cual el primero es distinto de cero y cada uno de los términos siguientes se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad constante llamada "razón".

Sea la progresión geométrica:

$$: : t_1 : t_3 : \ldots : t_{n-1} : t_n$$

Se denota: t_1 = primer término

$t_2 = t_1 \cdot q$

$t_3 = t_2 \cdot q$

t_n = término de lugar "n"

q = razón

n = número de términos

S_n = suma de "n" términos

P_n = producto de "n" términos

Ejemplos:

i) : : 2 : 10 : 50 : 250

Donde: $q = 5$

Es una progresión creciente porque $q > 1$.

ii) : : 16 : 8 : 4 : 2

Donde: $q = \frac{1}{2}$

Es una progresión decreciente porque $q < 1$.

PROPIEDADES

1º Término cualquiera:

$$\boxed{t_n = t_1 \cdot q^{n-1}}$$

2º El producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos:

$$: : t_1 : t_2 : \ldots : t_p : \ldots : t_q : \ldots : t_{n-1} : t_n$$

$$\boxed{t_p \cdot t_q = t_1 \cdot t_n}$$

a) Término Central:

$$\boxed{t_{central} = \sqrt{t_1 \cdot t_n}}$$

b) En una P.G. de tres términos el segundo es media geométrica entre el primero y el tercero.

$$: : t_1 : t_2 : t_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 = \sqrt{t_1 \cdot t_3}}$$

3º Producto de "n" primeros términos:

$$\boxed{P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}}$$

4º Suma de "n" primeros términos:

$$\boxed{S_n = \frac{(q \cdot t_n) - t_1}{q - 1}}$$

o:

$$\boxed{S_n = t_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

5º El limite de la suma de los términos de una P.G. decreciente ilimitada es:

$$\boxed{\lim S = \frac{t_1}{1 - q}}$$

INTERPOLACIÓN

Razón para interpolar:

$$q_i = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Donde:

m = número de términos para interpolar.

"a" y "b": números entre los cuales se interpola "m" términos.

Ejemplo:

Interpolar 3 términos entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{256}$

Donde:

$$b = \frac{1}{256} \quad ; \quad a = \frac{1}{16} \quad ; \quad m = 3$$

$$\Rightarrow \quad q_i = \sqrt[3+1]{\frac{1}{256} \Big/ \frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Luego, la P.G. será:

$$: : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} : \frac{1}{256}$$

LOGARITMOS

PRINCIPALES CONCEPTOS

DEFINICIÓN

Se llama logaritmo de un número, en una base dada, positiva y distinta de la unidad, al "exponente" a que debe elevarse la base para obtener el número dado.

$$\boxed{\log_b N = x} \Rightarrow \boxed{b^x = N} \Rightarrow b^{\log_b N} = N$$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Hay muchos sistemas de logaritmos, que se diferencian según la base que se elija. Los sistemas más

comunes son el Nepariano de base "e" y el vulgar, o de Briggs, de base 10.

$$e = 2{,}718281\ldots$$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

1º Sólo existe logaritmos de base positiva y diferente de 1.

$$b > 1$$

2º En el campo de los números reales no existe logaritmos de números negativos.

3º a) Si la base es mayor que la unidad:

$$\log_b \infty = +\infty \quad \text{y} \quad \log_b 0 = -\infty$$

b) Si la base es menor que la unidad:

$$\log_b \infty = -\infty \quad \text{y} \quad \log_b 0 = \infty$$

4º En todo sistema de logaritmos:

$$\log_b b = 1$$

5º En todo sistema de logaritmos:

$$\log_b 1 = 0$$

6º Logaritmo de un producto:

$$\log_b A \,.\, B = \log_b A + \log_b B$$

7º Logaritmo de un cociente:

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

8º Logaritmo de una potencia:

$$\log_b A^n = n \log_b A$$

9º Logaritmo de un radical:

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}$$

10º En todo sistema de logaritmos, si se eleva a la base y al número a una potencia "n" o a una raíz "n", el resultado no varía.

$$\log_b N = \log_{b^n} N^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{N}$$

COLOGARITMO

Cologaritmo de un número, en una base "b", es el logaritmo de la inversa del número en la misma base; o también, es igual al logaritmo del mismo número en la misma base, precedido del signo menos.

$$\text{colog}_b N = \log_b \left(\frac{1}{N}\right) = -\log_b N$$

ANTILOGARITMO

Antilogaritmo es el número que dio origen al logaritmo.

$$\text{Antilog}_b x = b^x$$

o:

$$\text{Antilog}_b \log_b N = N$$

CAMBIO DE UN SISTEMA DE LOGARITMOS A OTRO

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Fórmula que permite conocer al logaritmo de un número en base "b", conociendo el logaritmo del número en base "a".

LOGARITMOS COMO PROGRESIONES

Sean las progresiones geométrica, de razon "q" y primer término "1"; y aritmética, de razón "r" y primer término "0", cuyos términos se corresponden:

$$\text{P.G.} \quad :: 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots : q^n$$

$$\text{P.A.} \quad : 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots \,.\, nr$$

se tiene:

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b q = r$$

$$\log_b q^2 = 2r$$

$$\log_b q^n = nr$$

BASE DEL SISTEMA DE LOGARITMOS DEFINIDO POR UNA P.G. Y UNA P.A.

De la conclución anterior:

$$\log_b q^n = nr \quad \Rightarrow \quad q^n = b^{nr}$$

$$\boxed{b = \sqrt[r]{q}}$$

La base de todo sistema de logaritmos es igual a la raíz "r" de la razón "q" de la P.G., siendo "r" la razón de la P.A. cuyos términos se correspondan.

Ejemplo:

Hallar la base del sistema de logaritmos definido por las progresiones:

$$: : \ldots : \frac{1}{81} : \frac{1}{9} : 1 : 9 : 81 : \ldots$$

$$: \ldots . -8 . -4 . -0 . 4 . 8 . \ldots$$

PROCEDIMIENTO:

En la P.G.: $q = \dfrac{1/9}{1/81} = 9$

En la P.G.: $r = -4 - (-8) = 4$

$$\Rightarrow \quad b = \sqrt[r]{q} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[4]{9} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{3}$$

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS

También se llama logaritmos "naturales" o "hiperbólicos". Tiene como base el número trascendente" "e", definido como:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281 \ldots$$

o:

$$e = \lim_{n \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = 2{,}718281 \ldots$$

NOTACIÓN:

El logaritmo de un número "N" en base "e" se representa así:

In N

o:

Ln N

o:

$\log_e N$

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

Se les llama también "vulgares" o de Briggs. Son logaritmos de base 10 definidos por las progresiones:

$$: : \ldots : 10^{-n} : \ldots : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \ldots : 10^n : \ldots$$

$$: \ldots . -n . \ldots . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . \ldots . n . \ldots$$

NOTACIÓN:

El logaritmo de base 10 se representa así:

$\log_{10} N$

o simplemente:

log N

Los logaritmos tienen 2 partes:

La parte entera del logaritmo se llama "característica".

La parte decimal del logaritmo se llama "mantisa".

PROPIEDADES DEL SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

1º Los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos y los logaritmos de los números menores que 1 son negativos.

$$(\log > 1) > 0 \qquad (\log < 1) < 0$$

2º Los logaritmos de potencia de 10 son iguales al exponente de dicha potencia.

$$\log 10^n = n$$

3º Los logaritmos de los números correspondidos entre dos potencias consecutivas de 10 son decimales.

Ejemplo:

$$\log 1\,000 = \log 10^3 = 3$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$\log 545 = 2{,}736397$$

4º La "característica del logaritmo decimal de un número mayor que 1 es positivo e indica el número de cifras enteras más 1, que tiene la parte entera del número.

Ejemplos:

i) log 5 = 0 . ...; 0 + 1 = cifra entera

ii) log 238 = 2 . ... ; 2 + 1 = 3 cifras enteras

iii) log 48,64 = 1 . ... ; 1 + 1 = 2 cifras enteras

5º La característica del logaritmo decimal de un número menor que la unidad es negativa e igual al número de ceros que preceden a la primera cifra significativa, inclusive el cero de los enteros.

Ejemplos:

i) log 0,0038 = $\overline{3}$ . ...

ii) log 0,516 = $\overline{1}$ . ...

6º Si se multipica o divide un número por la unidad seguida de ceros, no altera la mantisa de su logaritmo pero la característica aumenta o disminuye respectivamente en tantas unidades como ceros acompañan a la unidad.

Ejemplo:

log 0,00361 = $\overline{3}$ . ...

log 0,361 = $\overline{1}$ . ...

TRANSFORMAR UN LOGARITMO TOTALMENTE POSITIVO A OTRO PARCIALMENTE NEGATIVO (A) Y VICEVERSA (B)

El siguiente ejemplo indica el procedimiento para (A):

$$\log \frac{1}{75} = \text{colog } 75 = -\log 75$$

$$= -1{,}875061 = -(1 + 0{,}875061)$$

$$= -1 - 0{,}875061 + 1 - 1$$

$$= (-1 - 1) + (1 - 0{,}875061)$$

$$= -2 + 0{,}124939$$

finalmente:

$$\log \frac{1}{75} = \text{colog } 75 = \overline{2},\ 124939$$

Ejemplo: para el procedimiento inverso (B):

$$\log 0{,}071 = \overline{2}{,}851258$$

$$\log 0{,}071 = -2 + 0{,}851258 + 1 - 1$$

$$\log 0{,}071 = (-2 + 1) - (1 - 0{,}851258)$$

$$\log o{,}071 = -1 - 0{,}148742$$

$$\log 0{,}071 = -1{,}148742$$

CONVERSIÓN DE LOGARITMOS DECIMALES A NEPERIANOS

$$\text{In } N = 2{,}3026 \log N$$

Ejemplo:

Hallar logaritmo neperiano de 1000.

PROCEDIMIENTO:

$$\text{In } 1\,000 = 2{,}3026 \log 1\,000$$

$$= 2{,}3026 \log 103$$

$$= 2{,}3026 \,.\, 3$$

$$\text{In } 1\,000 = 6{,}9078$$

CONVERSIÓN DE LOGARITMOS NEPERIANOS A DECIMALES

$$\log N = 0{,}4343 \text{ In } N$$

Ejemplo:

Hallar el logaritmo decimal de 16, si:

$$\text{In } 4 = 1{,}38629$$

PROCEDIMIENTO:

$$\log 16 = 0{,}4343 \text{ In } 16 = 0{,}4343 \text{ In } 4^2$$

$$= 0{,}4343 \,.\, 2 \text{ In } 4$$

$$= 0{,}4343 \,.\, 2 \,.\, 1{,}38629$$

$$\log 16 = 1{,}2041$$

INTERÉS COMPUESTO Y ANUALIDADES

EL INTERÉS COMPUESTO

Es un mecanismo mediante el cual las ganancias se van sumando al capital, generalmente cada año, para formar parte del capital. produciendo nuevos intereses.

$$M = C\,(1 + r)^t$$

Donde:

M = Monto = C + 1 = Capital + Interes

C = Capital inicial impuesto.

$r = \frac{R}{100}$ = interés producido por 1 unidad monetaria en 1 año.

R = Interés producido por 100 u.m. en 1 año.

t = Tiempo impuesto al capital, en años.

INTERÉS COMPUESTO:

$$I = C\,[(1 + r)^t - 1]$$

Se denomina ANUALIDAD a la cantidad fija que se entrega o impone todos los años para formar un capital (anualidad de capitalización) o para amortizar una deuda (anualidad de amortización).

ANUALIDAD DE CAPITALIZACIÓN (A_c)

Es la cantidad fija que se impone al principio de cada año al "r" por uno de interés compuesto para formar un capital "C" en un tiempo "t".

$$A_c = \frac{C \cdot r}{(1 + r)^t - 1}$$

ANULADIDAD DE AMORTIZACIÓN (A_a)

Es la cantidad fija que se impone al final de cada año al "r" por uno de interés compuesto para amortizar una deuda "C" y los intereses que ocasiona, a interés compuesto, en un tiempo "t".

$$A_a = \frac{C \cdot r\,(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$$

GEOMETRÍA

DEFINICIÓN

Es la parte de la Matemática Elemental que trata de las propiedades y medidas de la extensión. La Geometría parte de ciertos conceptos primitivos dados intuitivamente, tales como: punto, recta y plano. Se divide en GEOMETRÍA PLANA Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

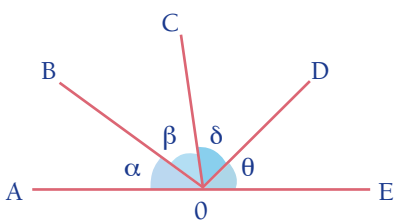
GEOMETRÍA PLANA

ÁNGULOS

TEOREMAS BÁSICOS

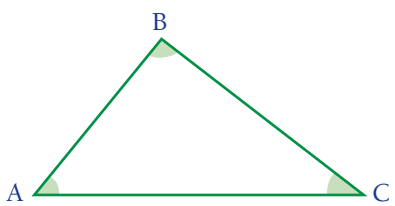
1) La suma de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto y a un mismo lado de una recta es 180°.

Punto O: $\alpha + \beta + \delta + \theta = 180°$



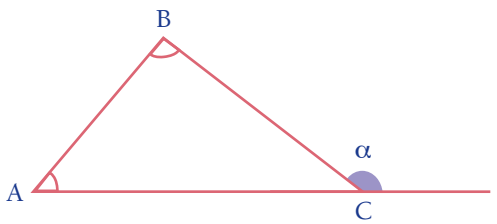
2) En todo triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

$\Delta\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}$: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$



3) En un triángulo cualquiera, el ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes con él.

Δ ABC: $\alpha = \hat{A} + \hat{B}$

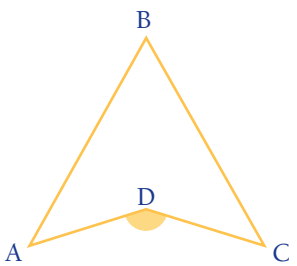


TEOREMAS AUXILIARES

TEOREMA 1.-

En todo cuadrilátero cóncavo, el ángulo exterior convexo, es igual a la suma de los ángulos interiores convexos:

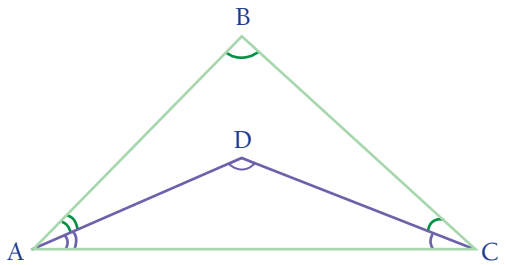
Δ ABCD: $A\hat{D}C = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$



TEOREMA 2.-

El ángulo formado por dos bisectrices interiores de un triángulo, es igual a noventa grados más la mitad del tercer ángulo:

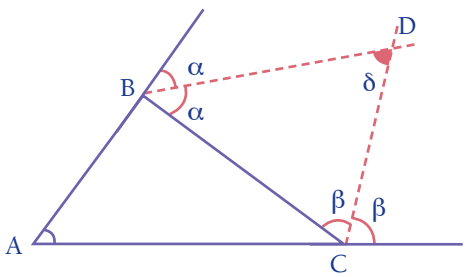
Δ ABC: $\boxed{A\hat{D}C = 90° + \frac{\hat{B}}{2}}$



TEOREMA 3.-

El ángulo formado por dos bisectrices exteriores de un triángulo es igual a noventa grados, menos la mitad del tercer ángulo.

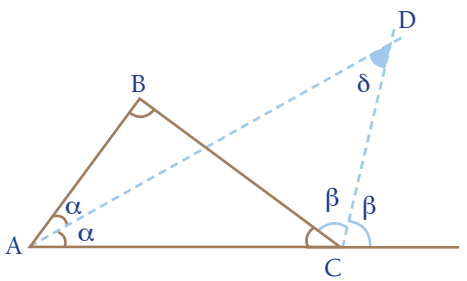
$$\delta = 90° - \frac{\hat{A}}{2}$$



TEOREMA 4.-

El ángulo formado por una bisectriz interior y una bisectriz exterior de un triángulo es igual a la mitad del tercer ángulo.

$$\delta = \frac{\hat{B}}{2}$$



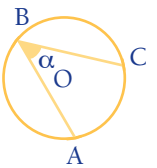
VALOR DE LOS ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Sean los ángulos "α":

ÁNGULO CENTRAL

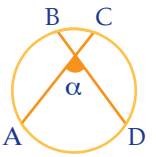
$$\alpha = \overset{\frown}{AC}$$

ÁNGULO INSCRITO



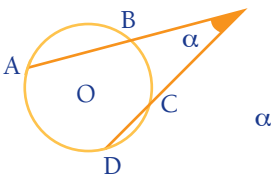
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

ÁNGULO INTERIOR



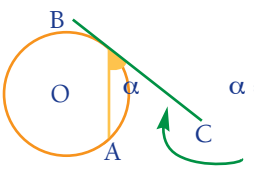
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2}$$

ÁNGULO EXTERIOR



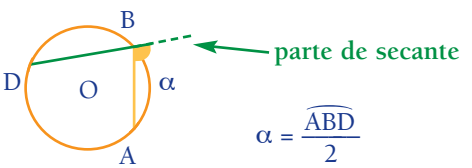
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2}$$

ÁNGULO SEMI-INSCRITO



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

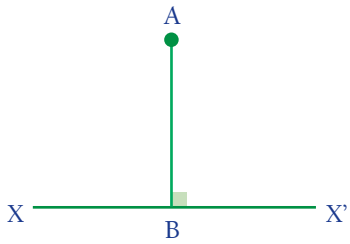
ÁNGULO EXINSCRITO



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{ABD}}{2}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

"Es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto a la recta".



AB: distancia de "A" a XX´

TRIÁNGULOS

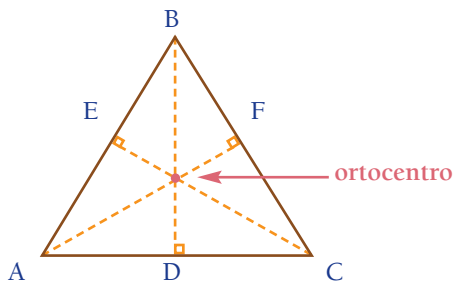
LÍNEAS PRINCIPALES DEL TRIÁNGULO

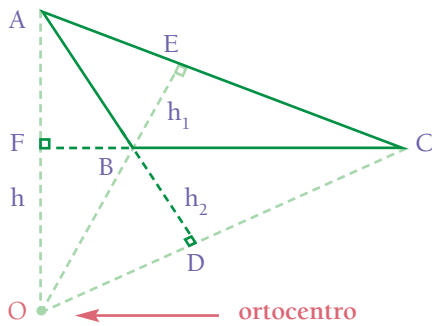
Son cuatro las líneas principales: Altura, Mediana, Mediatriz y Bisectriz.

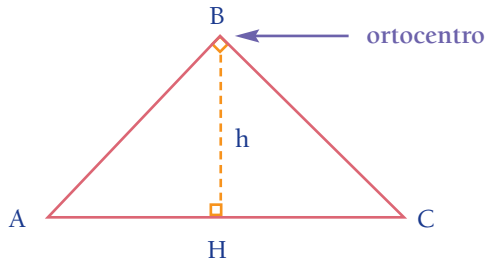
1) ALTURA

Es la distancia de un vértice al lado opuesto o a su prolongación. Las ALTURAS se cortan en un punto llamado ORTOCENTRO.

Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro es interior; si es obtusángulo es exterior; pero si es rectángulo, es el punto de intersección de los catetos.

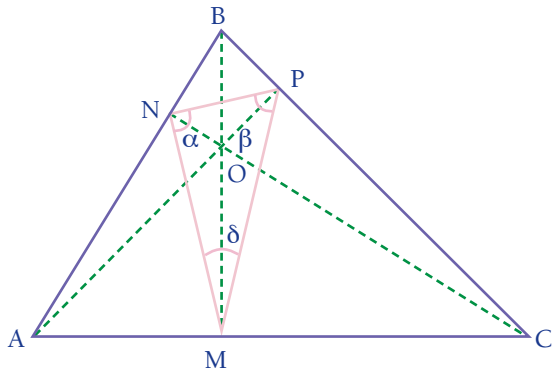






TRIÁNGULO ÓRTICO O PEDAL

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo dado.



α , β y δ : ángulos del triángulo órtico.

"O" es el incentro del triángulo órtico.

Δ MNP: órtico o pedal

Donde se cumple:

$\alpha = 180° - 2C$

$\beta = 180° - 2A$

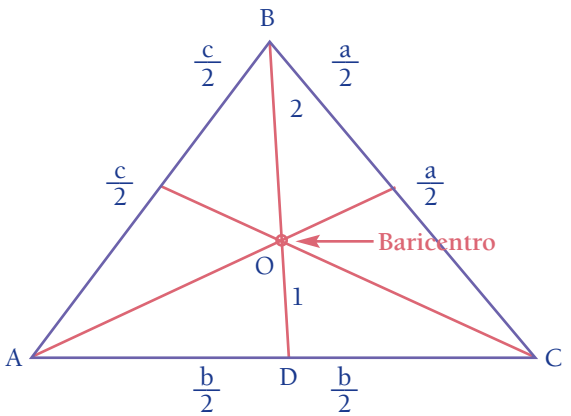
$\delta = 180° - 2B$

NOTA.-

En el triángulo rectángulo no se puede formar el triángulo órtico.

2)MEDIANA

Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

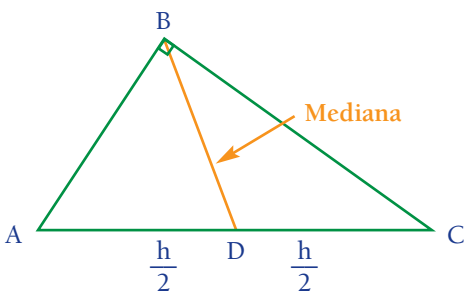


Las MEDIANAS se intersectan en un punto llamado BARICENTRO o CENTRO DE GRAVEDAD del triángulo, este punto tiene la propiedad de dividir a cada una de las medianas en la relación de dos es a uno. Por consiguiente, se cumple que:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{2}{1} \qquad OB = \frac{2}{3}\,BD \qquad OD = \frac{1}{3}\,BD$$

TEOREMA.- En todo triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de esa hipotenusa.

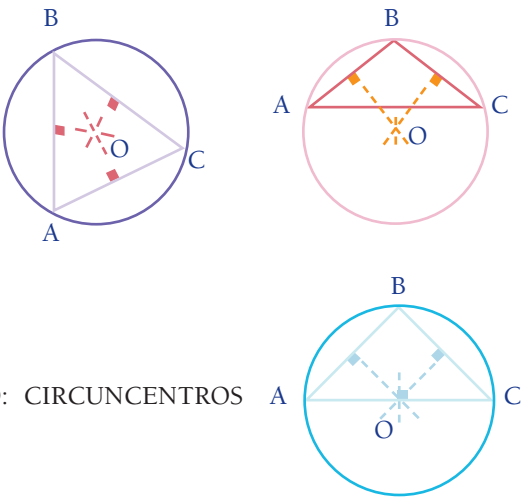
$$DB = \frac{AC}{2} = \frac{h}{2}$$



3) MEDIATRIZ

Es la perpendicular trazada desde el punto medio del lado de un triángulo. Las MEDIATRICES se cortan en un punto llamado CIRCUNCENTRO por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

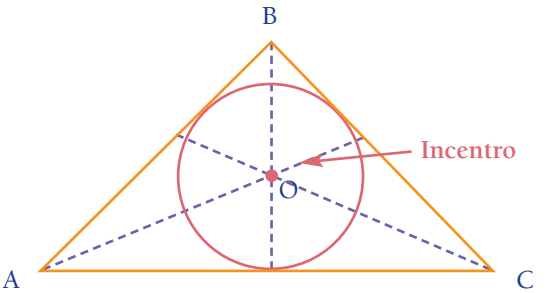
Cuando el triángulo es acutángulo, el CIRCUNCENTRO es interior, si es obtusángulo es exterior, pero si es rectángulo, es el punto medio de la hipotenusa.



O: CIRCUNCENTROS

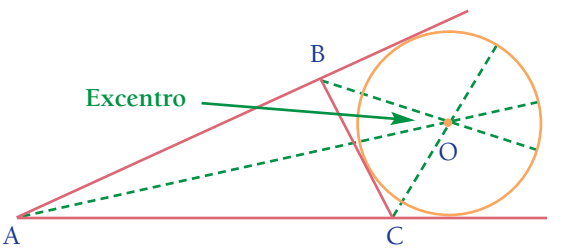
4) BISECTRIZ

Es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos parciales iguales. Las BISECTRICES de un triángulo se cortan en un punto "O" llamado INCENTRO por ser el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



EXCENTRO.- Es el punto "O" de intersección de una bisectriz interior con dos bisectrices exteriores relativas a los otros dos ángulos de un triángulo.

El excentro es el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo.



NOTA

SOBRE LA SITUACIÓN DE ALGUNOS PUNTOS.

LA RECTA DE EULER.

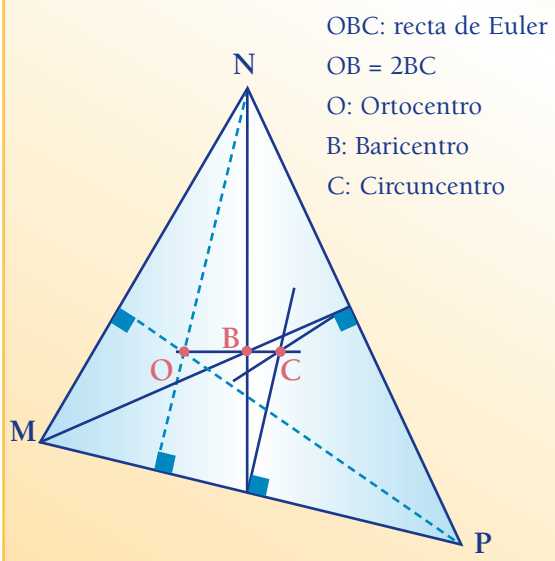
1.- **EL CIRCUNCENTRO** equidista de los vértices del triángulo.

2.- **EL INCENTRO** equidista de los lados del triángulo.

3.- **El EXCENTRO** equidista de los lados del triángulo.

RECTA DE EULER.-

En todo triángulo, excepto en el equilátero, el "ortocentro", el "baricentro" y el "circuncentro" están situados en línea recta (recta de Euler) y la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.



IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

Para determinar la igualdad de dos triángulos, bastará establecer la igualdad de tres elementos, a condición de incluir en ellos, por lo menos un lado. Si esta última cláusula no se cumple, se llegará sólo a la semejanza de triángulos.

1er. Caso.- Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre éstos es igual.

2do. Caso.- Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y los ángulos adyacentes a estos, respectivamente iguales.

3er. Caso.- Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

TEOREMAS DERIVADOS DE LA IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

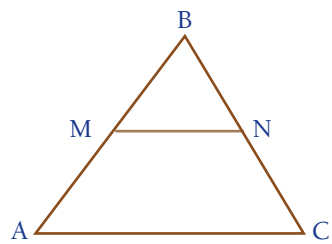
En virtud de la igualdad de triángulos, se demuestra los siguientes teoremas:

TEOREMA 1.-

Si por el punto medio del lado de un triángulo, se traza una paralela a otro lado, dicha paralela pasará por el punto medio del tercer lado y su longitud será igual a la mitad del lado al que es paralelo.

Si M = punto medio de AB y

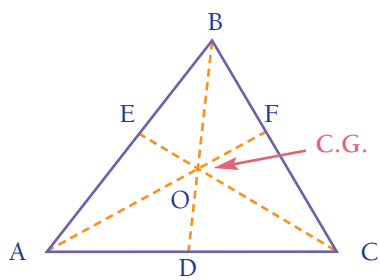
MN // AC $\Rightarrow$ N = punto medio de BC



$$MN = \frac{AC}{2}$$

TEOREMA 2.-

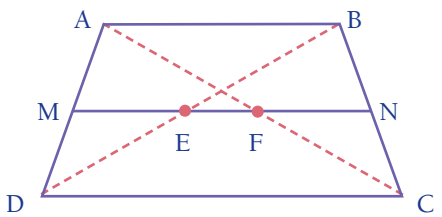
El "baricentro" o "Centro de Gravedad" de un triángulo divide a cada una de las medianas en la relación dos es a uno.



$$\Delta\ ABC: \boxed{\frac{OA}{OF} = \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE} = \frac{2}{1}}$$

TEOREMA 3.-

En cualquier trapecio, la mediana es igual a la semisuma de las bases; y el segmento que une los puntos medios de las diagonales es igual a la semidiferencia de las bases.



$$\boxed{MN = \frac{DC + AB}{2}}$$

$$\boxed{EF = \frac{DC - AB}{2}}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus elementos homólogos son proporcionales.

Se llama elementos homólogos a a quellos que se oponen a ángulos iguales, comparando ambos triángulos.

Los casos generales de semejanza de triángulos son:

1er. Caso.- Cuando tienen sus 3 ángulos iguales.

2do. Caso.- Cuando tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales.

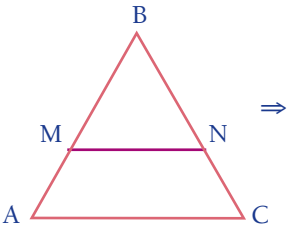
3er. Caso.- Cuando tienen sus lados respectivamente proporcionales.

TEOREMAS DERIVADOS DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA DE THALES

Toda recta, paralela al lado de un triángulo y que corta a los otros dos lados, determina un triángulo parcial, semejante al total y recíprocamente.

Si: MN // AC



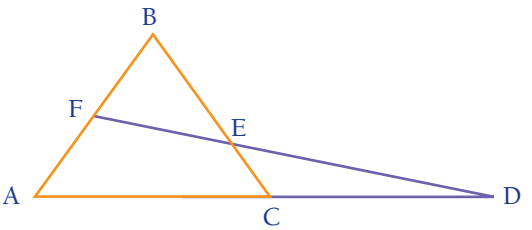
$\Rightarrow\ \Delta\ ABC \sim \Delta\ MBN$

Luego:

$$\boxed{\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}}$$

TEOREMA DE MENELAO

Toda recta que corta a los tres lados de un triángulo determina en estos, seis segmentos; siendo el producto de tres de ellos no consecutivos igual al producto de los otros tres.

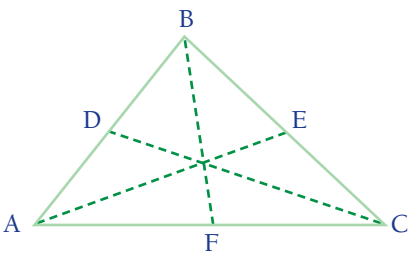


Δ ABC: $\boxed{AF\ .\ BE\ .\ CD = BF\ .\ CE\ .\ AD}$

FD: recta que corta a los tres lados.

TEOREMA DE CEVA

Las rectas que pasan por los vértices de un triángulo y son concurrentes, determinan en los lados de éste, seis segmentos; siendo el producto de tres de ellos no consecutivos igual al producto de los otros tres.



Δ ABC: $\boxed{AD.\ BE\ .\ CF = BD\ .\ CE\ .\ AF}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

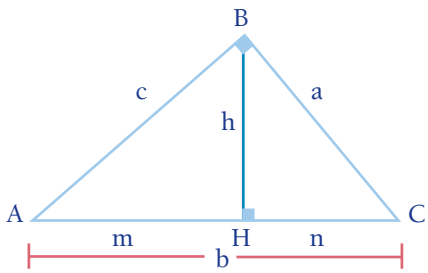
En cualquier triángulo rectángulo, se cumple las siguientes propiedades:

1° La altura relativa a la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos que determina sobre ésta.

2° Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ésta.

3° La suma de los cuadrados de los catetos, es igual al cuadrado de la hipotenusa; es el teorema de Pitágoras.

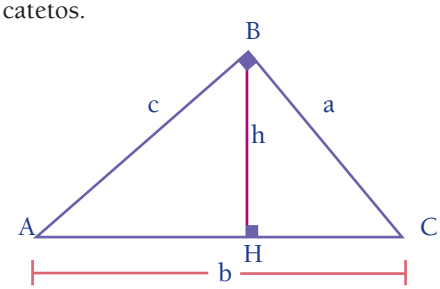
4° El producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura relativa a ésta.



1°	$h^2 = mn$
2°	$a^2 = bn$
	$c^2 = bm$
3°	$a^2 + c^2 = b^2$
4°	$ac = bh$

TEOREMA.-

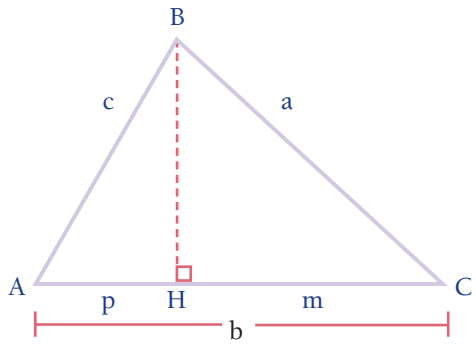
En todo triángulo rectángulo, la inversa del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de los catetos.



$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

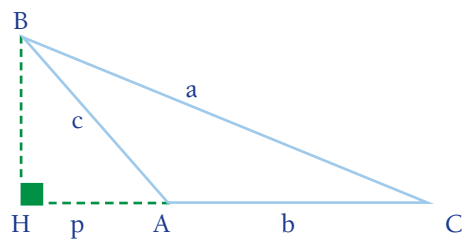
1er caso.- En todo triángulo acutángulo, el cuadrado del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de éstos por la proyecciòn del otro sobre el que se ha tomado.



Δ ABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bp$

Δ ABC: $c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$

2do. Caso.- En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de unos de éstos por la proyección del otro sobre el que se ha tomado.



Δ ABC: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bp$

TEOREMA.-

Conocidos los tres lados de un triángulo: a, b y c siendo "a" el lado mayor, el triángulo será rectángulo, acutángulo u obtusángulo, respectivamente, si:

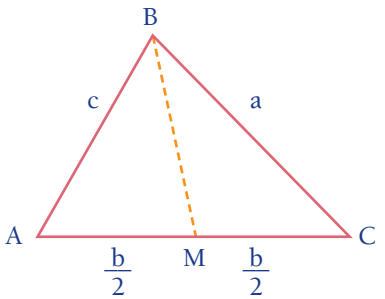
1) $a^2 = b^2 + c^2$ Δ rectángulo

2) $a^2 < b^2 + c^2$ Δ acutángulo

3) $a^2 > b^2 + c^2$ Δ obtusángulo

RELACIÓN DE LADOS CON LA MEDIANA

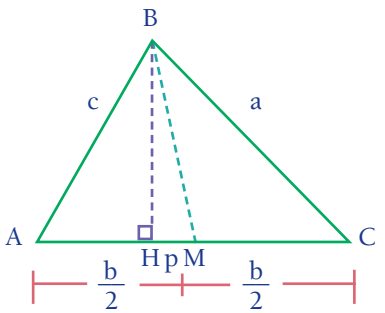
En un triángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los lados que concurren en el vértice de donde parte la mediana, es igual al doble del cuadrado de dicha mediana, más la mitad del cuadrado del tercer lado.



Δ ABC: $a^2 + c^2 = 2\overline{BM}^2 + \frac{b^2}{2}$

TEOREMA AUXILIAR.-

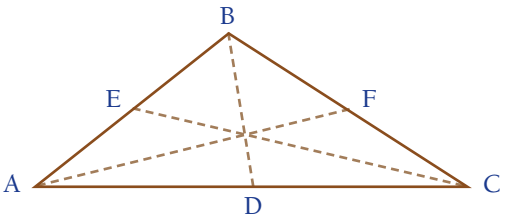
En un triángulo, la diferencia de los cuadrados de los lados que concurren en el vértice de donde parte la mediana, es igual al doble producto del tercer lado por la proyección de la mediana sobre éste.



Δ ABC: $a^2 - c^2 = 2bp$

TEOREMA.-

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las tres medianas es igual a tres cuartos de la suma de los cuadrados de los lados.



Δ ABC:

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = \frac{3}{4}\ (AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

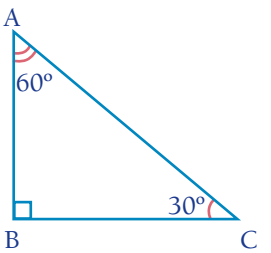
RELACIÓN DE LADOS CON ÁNGULOS : 30º, 60º, 45º

1.- En todo triángulo rectángulo de ángulos 30º y 60º, se cumple:

a.- El cateto que se opone a 30º es igual a la mitad de la hipotenusa.

b.- El cateto que se opone a 60º es igual a la mitad de la hipotenusa por la raíz cuadrada de 3.

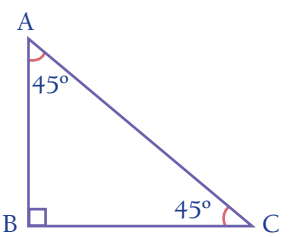
Δ ABC: 30º - 60º - 90º



a) $AB = \frac{AC}{2}$

b) $BC = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$

2.- En todo triángulo rectángulo isósceles, cada cateto es igual a la mitad de la hipotenusa por la raíz cuadrada de 2.

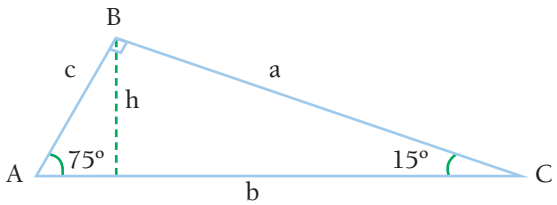


Δ ABC: 45º - 45º - 90º

$$AB = BC = \frac{AC\sqrt{2}}{2}$$

3.- En un triángulo rectángulo de ángulos 15º y 75º, la altura relativa a la hipotenusa es la cuarta parte de dicha hipotenusa.

Δ ABC: 15º - 75º - 90º

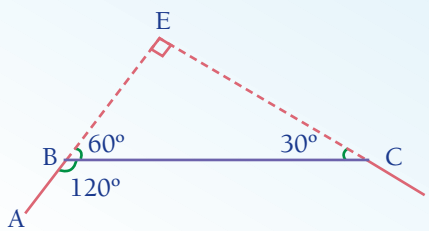


$$h = \frac{b}{4}$$

NOTA.-

Cuando se tenga ángulos de 120º, 135º o 150º, es preferible trabajar con el suplemento: 60º, 45º o 30º; de modo que éste sea el ángulo de un triángulo rectángulo convenientemente construido, al cual se le aplica los teoremas vistos anteriormente, así:

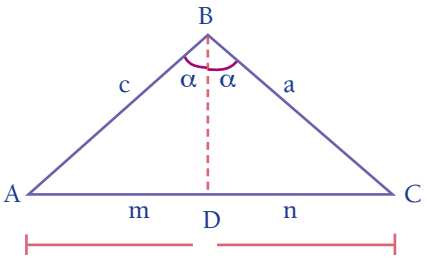
Δ BEC: 30º - 60º - 90º



RELACIÓN DE LADOS CON SEGMENTOS DETERMINADOS POR LA BISECTRIZ

1er. Caso: BISECTRIZ INTERIOR

En un triángulo cualquiera, la bisectriz interior determina en el lado opuesto, segmentos proporcionales a los lados que forman el vértice de donde parte dicha bisectriz.

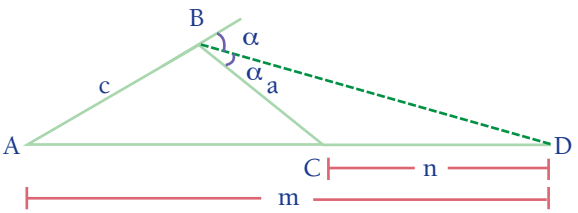


Δ ABC: $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$

2do. Caso: BISECTRIZ EXTERIOR

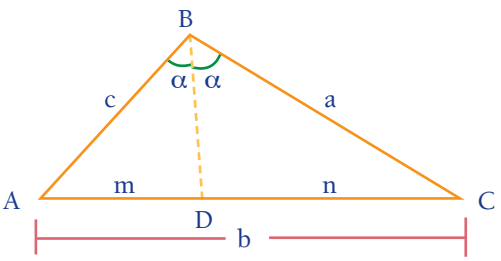
La bisectriz exterior de un triángulo, determina en el lado opuesto, segementos proporcionales a los lados que forman el vértice de donde parte esa bisectriz.

Δ ABC: $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$



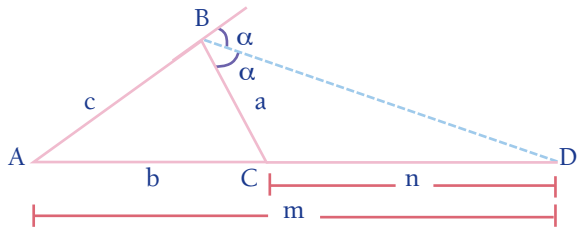
RELACIÓN DE LADOS CON BISECTRIZ

1er. Caso: En un triángulo cualquiera, la bisectriz interior elevada al cuadrado, es igual al producto de los lados que forman el vértice de donde parte dicha bisectriz, menos el producto de los segmentos determinados por esa bisectriz en el tercer lado.



Δ ABC: $\overline{BD}^2 = a \cdot c - m \cdot n$

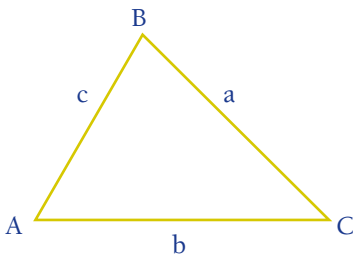
2do. Caso.- En todo triángulo, la bisectriz exterior elevada al cuadrado, es igual al producto de los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado opuesto menos el producto de los lados que forman el vértice de donde parte esa bisectriz.



Δ ABC: $\overline{BD}^2 = m \cdot n - a \cdot c$

RELACIÓN DE LADOS EN DESIGUALDAD

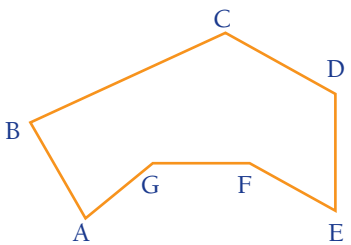
En un triángulo, debe cumplirse que un lado es menor que la suma de los otros dos lados pero mayor que su diferencia.



Δ ABC: $b - c < a < b + c$

TEOREMA.-

Toda línea poligonal envuelta es menor que la línea poligonal envolvente que tiene los mismos extremos que aquella.



$AG + GF + FE < AB + BC + CD + DE$

Envuelta < Envolvente

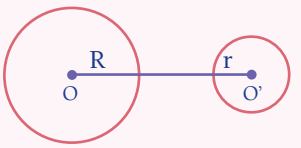
CIRCUNFERENCIA

Circunferencia es una curva plana, cerrada, cuyos puntos son todos equidistantes de otro que se llama centro, situado en el mismo plano. Más formalmente, es el lugar Geométrico de todos los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Las posiciones relativas de dos circunferencias son: Exteriores, Interiores, Tangentes (exteriores e interiores), Secantes y Concéntricas.

EXTERIORES

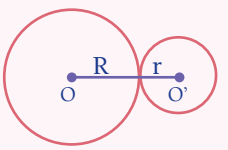


$OO' > R + r$

INTERIORES

$OO' < R - r$

TANGENTES EXTERIORES

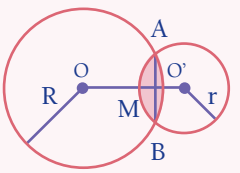


$OO' = R + r$

TANGENTES INTERIORES

$OO' = R - r$

SECANTES



$R - r < OO' < R + r$

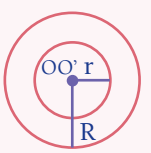
Además:

AB = cuerda común

$AB \perp OO'$

AM = BM

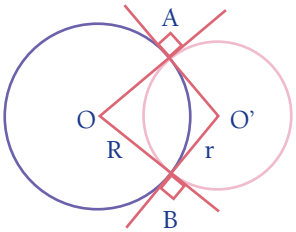
CONCENTRICAS



OO' = cero

CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

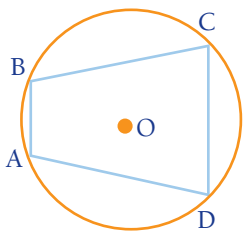
Son dos circunferencias secantes cuyos radios son perpendiculares entre sí en los puntos de intersección.



$R \wedge r$

CUADRILÁTERO INSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

Es todo cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a la circunferencia y se cumple que los ángulos opuestos son suplementarios.



▭ ABCD: $\hat{B} + \hat{D} = 180º$

$\hat{A} + \hat{C} = 180º$

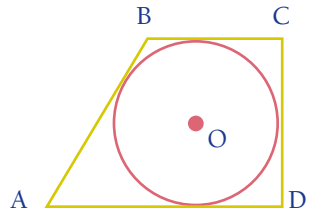
CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una circunferencia, si y sólo si su ángulos opuestos son suplementarios.

Por ejemplo: El cuadrado y el rectángulo.

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

Es todo cuadrilátero cuyos lados son tangentes a la circunferencia. En estos cuadriláteros se cumple que la suma de los lados opuestos son iguales.



▭ ABCD: $AB + CD = BC + AD$

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

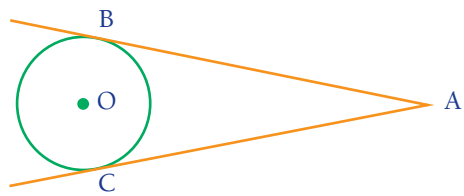
Es el cuadrilátero cuyos lados pueden ser tangentes a la circunferencia, sólo será posible si la suma de los lados opuestos son iguales.

Por ejemplo: El cuadrado y el rombo son circunscriptibles.

PROPIEDADES DE LAS TANGENTES

TEOREMA 1.-

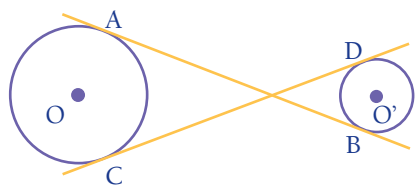
Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia, son iguales.



$AB = AC$

TEOREMA 2.-

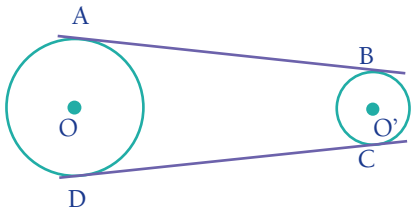
Las tangentes comunes interiores a dos circunferencias, son iguales.



$AB = CD$

TEOREMA 3.-

Las tangentes comunes exteriores a dos circunferencias, son iguales.

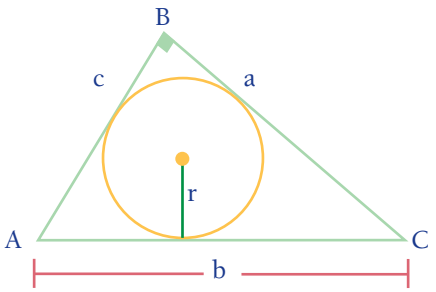


AB = CD

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA 1.-

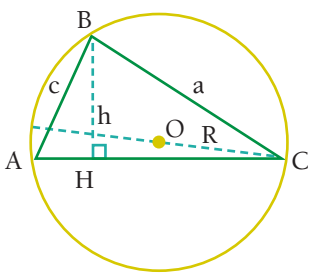
En todo triángulo rectángulo, la suma de los catetos es igual a la suma de la hipotenusa más el diámetro de la circunferencia inscrita al triángulo.



Δ ABC: $a + c = b + 2r$

TEOREMA 2.-

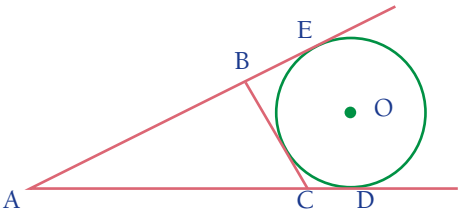
En todo triángulo, el producto de dos lados es igual al producto de la altura relativa al tercero por el diámetro de la circunferencia circunscrita.



Δ ABC: $a \cdot c = h \cdot 2R$

TEOREMA 3.-

El triángulo exinscrito a una circunferencia, tiene por perímetro el doble de una de las tangentes de los lados prolongados, excepto el lado tangente.



Δ ABC: $2p = 2AE = 2AD$

o: $p = AE = AD$

donde: 2p = perímetro

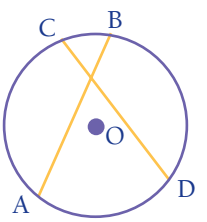
p = semiperímetro

LÍNEAS PROPORCIONALES EN EL CÍRCULO

Se presentan tres propiedades o teoremas:

TEOREMA 1.-

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el producto de los dos segmentos de una, es igual al producto de los dos segmentos de la otra.

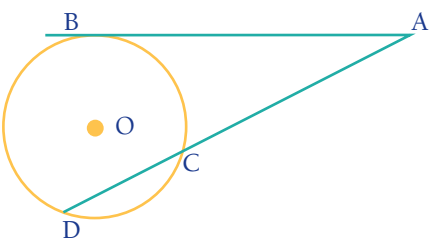


Punto E: $AE \cdot EB = CE \cdot DE$

TEOREMA 2.-

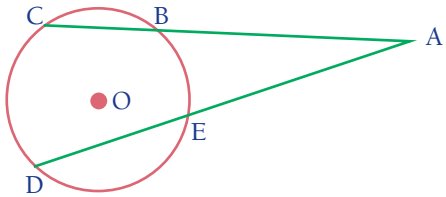
Si desde un punto exterior a un círculo se traza a él una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.

Punto A: $AB^2 = AD \cdot AC$



TEOREMA 3.-

Si desde un punto exterior a un círculo, se traza dos o más secantes, el producto de una de ellas y su parte externa es igual al producto de la otra y su parte externa.

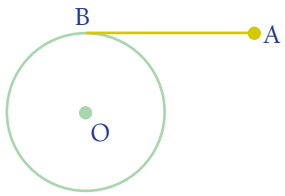


Punto A: $AC \cdot AB = AD \cdot AE$

POTENCIA DE UN PUNTO

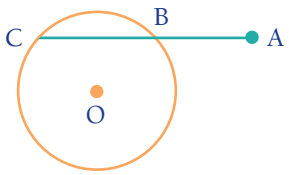
Se define potencia de un punto, con relación a una circunferencia de centro O, a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

1.- Al cuadrado de la tangente trazada desde ese punto.



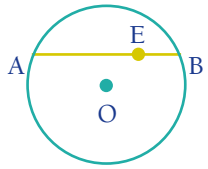
Potencia $A_{(0)} = \overline{AB}^2$

2.- El producto de la secante (trazada desde ese punto) y su parte externa.



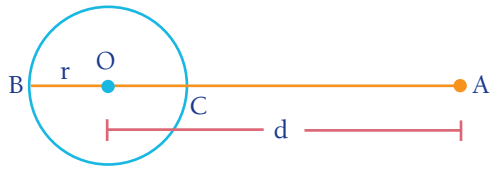
Potencia $A_{(0)} = AC \cdot AB$

3.- Al producto de los segmentos en que dicho punto divide a una cuerda.



Potencia $E_{(0)} = AE \cdot BE$

La forma general de potencia se expresa en función de la distancia "d" del punto al centro y del radio "r" de la circunferencia.



Potencia $A_{(0)} = d^2 - r^2$

OBSERVACIONES SOBRE LA POTENCIA DE UN PUNTO

1.- Cuando el punto es exterior, su potencia es positiva, ya que: $d > r$.

2.- Cuando el punto es interno, su potencia es negativa, ya que: $d < r$.

3.- Cuando el punto está en la circunferencia, su potencia es nula, porque: $d = r$.

LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico es un sistema de puntos o conjuntos de puntos que tienen una misma propiedad.

La mediatriz de un segmento de recta, la bisectriz de un ángulo convexo, la circunferencia, etc., son casos de lugares geométricos.

EJE RADICAL

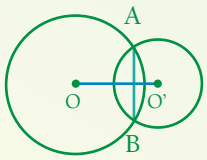
Es el lugar geométrico de los puntos que tiene igual potencia con relación a dos circunferencias dadas.

El eje radical es una línea recta perpendicular a la línea que une los centros.

POSICIONES DEL EJE RADICAL

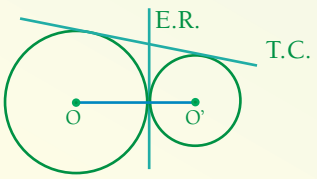
Cuando las circunferencias son:

SECANTES



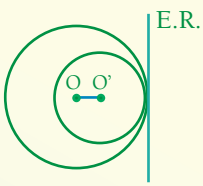
E.R. cuerda común AB

TANGENTES EXTERIORMENTE



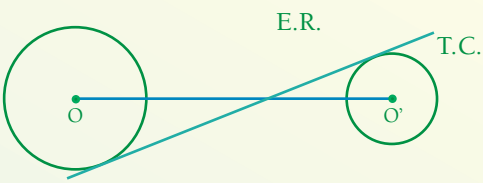
E.R. tangente común

TANGENTES INTERIORMENTE

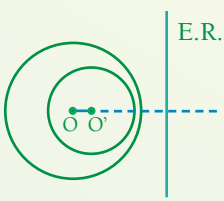


E.R. tangente común

EXTERIORES



INTERIORES



Nótese que si las circunferencias son concéntricas, no hay eje radical.

PROPIEDADES DEL EJE RADICAL

1º El eje radical de dos circunferencias exteriores está más cerca al centro de la menor que al de la mayor.

2º El eje radical de dos circunferencias es el Lugar Geométrico de los puntos, desde el cual se puede trazar a las dos circunferencias, tangentes iguales.

3º El eje radical de dos circunferencias pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.

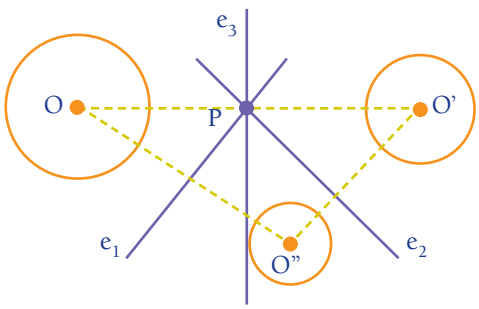
OBSERVACIÓN:

En las propiedades 2º y 3º, hay que considerar las posiciones de las dos circunferencias, a las cuales se les puede trazar tangentes comunes inferiores o exteriores.

CENTRO RADICAL

Es el punto de intersección de los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas de dos en dos. Los centros de las circunferencias no están en línea recta.

P = Centro Radical



El **centro radical**, es el punto desde el cual se puede trazar a las tres circunferencias, tangentes iguales entre sí, y es el centro de circunferencia ortogonal a los tres.

No se cumple si las tres son secantes, entre otras posibilidades.

MEDIA Y EXTREMA RAZÓN DE UN SEGMENTO O SECCIÓN AÚREA

Un segmento está dividido en media y extrema razón, por un punto, si la parte mayor es media proporcional entre la parte menor y el segmento total. Es decir:

$$AB^2 = AC \cdot BC$$

A la parte AB, se le llama sección áurea o segmento áureo, cuyo valor es:

$$AB = \frac{AC\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

El número áureo es:

$$n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad AB = AC \cdot n$$

DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Se dice que un segmento "AB" está dividido armónicamente por dos puntos (C y D) tal que uno "C" le pertenece y otro "D" está en su prolongación, si se cumple que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

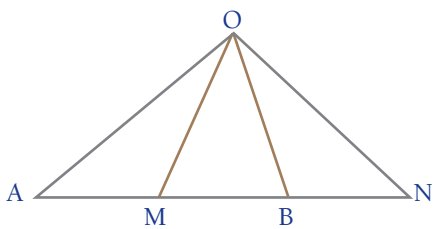
A los puntos: A, B, C y D se les llama: "cuaterna armónica"; siendo C y D los conjugados armónicos de A y B.

HAZ ARMÓNICO

Es todo sistema de cuatro rectas concurrentes que pasan por una cuaterna armónica.

OA, OM, OB, ON: rayos del haz.

OM y ON: rayos conjugados respecto de OA y OB, recíprocamente.

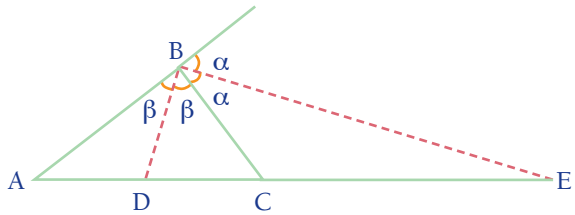


TEOREMA.-

Los pies de las bisectrices interior y exterior de un triángulo son los conjugados armónicos de los vértices del lado respectivo.

Se cumple:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}$$



POLÍGONOS

DEFINICIÓN Y CONCEPTOS

Son las figuras geométricas formadas por un conjunto de segmentos de recta uno a continuación de otro, en un mismo plano, llamados lados que cierran una "región" o área. El punto común de dos segmentos consecutivos se llama *vértice*.

Los polígonos pueden ser: regulares e irregulares.

Son regulares aquellos que tienen sus ángulos iguales, lados iguales y son siempre inscriptibles y circuncriptibles a una circunferencia.

Los irregulares, no cumplen estas condiciones.

ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES

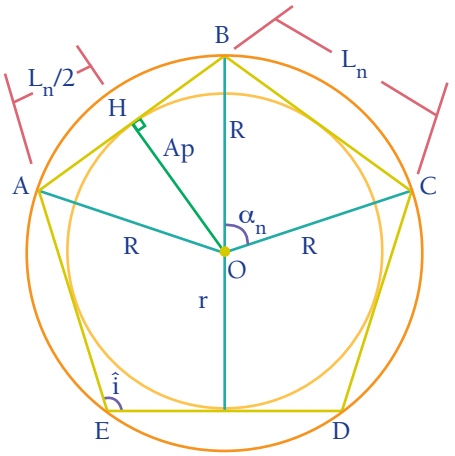
$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$$S_i = 180^\circ\,(n - 2)$$

$$\hat{i} = \frac{180^\circ\,(n - 2)}{n}$$

$$N_D = \frac{n\,(n - 2)}{2}$$

$$S_E = 360^\circ$$



O = centro de la circunferencias inscrita y circunscrita.

α_n = ángulo central

n = número de lados

S_i = suma de ángulos internos

i = ángulos interior

L_n = longitud del lado del polígono

N_D = número total de diagonales

R = radio de la circunferencia circunscrita

r = radio de la circunferencia inscrita = Ap

S_E = suma de ángulos exteriores

Ap = apotema = r

n-2 = número de triángulos que se pueden trazar desde un solo vértice.

n-3 = número de diagonales que se puede trazar desde un solo vértice.

CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS IRREGULARES

$$S_i = 180^\circ\ (n - 2)$$

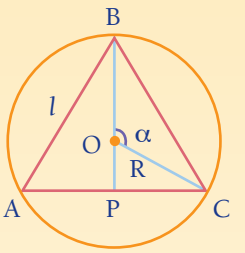
$$S_E = 360^\circ$$

$$N_D = \frac{n\ (n - 3)}{2}$$

VALOR DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES

Angulos centrales, lados, apotemas y áreas de los polígonos regulares en función del radio de la circunferencia circunscrita.

TRIÁNGULO EQUILATERO:



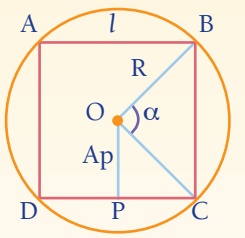
$$\alpha = 120^\circ$$

$$l = R\sqrt{3}$$

$$Ap = \frac{R}{2}$$

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

CUADRADO:



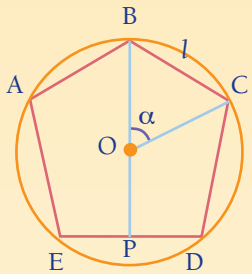
$$\alpha = 90^\circ$$

$$l = R\sqrt{2}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$S = 2R^2$$

PENTÁGONO:



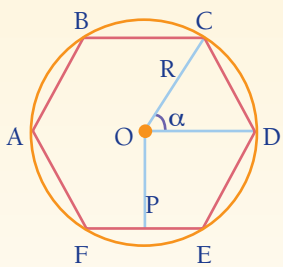
$$\alpha = 72^{\circ}$$

$$l = \frac{R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$S = \frac{5R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

EXÁGONO



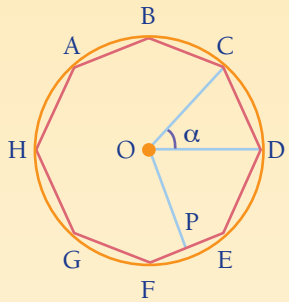
$$\alpha = 60^{\circ}$$

$$l = R$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

OCTÁGONO



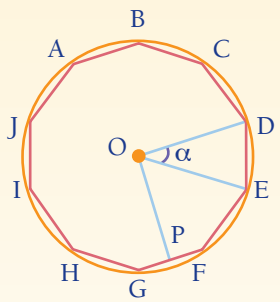
$$\alpha = 45^{\circ}$$

$$l = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$S = 2R^2\sqrt{2}$$

DECÁGONO



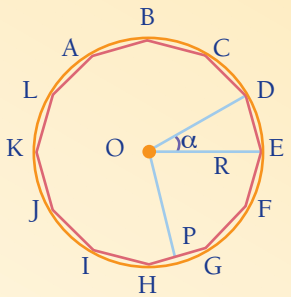
$$\alpha = 36^{\circ}$$

$$l = \frac{R\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$S = \frac{5R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

DODECÁGONO:



$$\alpha = 30^{o}$$

$$l = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$S = 3R^2$$

LEYENDA GENERAL:

α = ángulo central

l = lado

Ap = Apotema = OP

S = superficie = área

NOTAS.-

1.- El lado del decágono regular, es la sección áurea de un radio que se encuentra dividido en media y extrema razón.

$$l_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

2.- El lado del pentágono regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el lado del exágono regular y el lado del decágono regular.

$$\Delta\ ABC:\ l_5 = \sqrt{l_6^2 + l_{10}^2}$$

3.- El área de un polígono regular se puede calcular así:

$$S_n = p_n \cdot Ap_n$$

Donde: "p_n", el semiperímetro y "Ap_n" la apotema, del polígono de "n" lados.

CONCLUSIONES SOBRE LOS POLÍGONOS REGULARES

1º El ángulo exterior de un polígono regular y el ángulo central son iguales.

2º El ángulo interior de un polígono regular y el ángulo central son suplementarios.

3º De dos o más polìgonos regulares, el que tiene más lados, posee menor ángulo central.

4º Un triángulo isósceles puede ser el elemento de un polígono regular, siempre que su ángulo desigual sea un divisor de 360º; siendo el cociente obtenido el número de lados del polígono.

En ese triángulo se cumplirá:

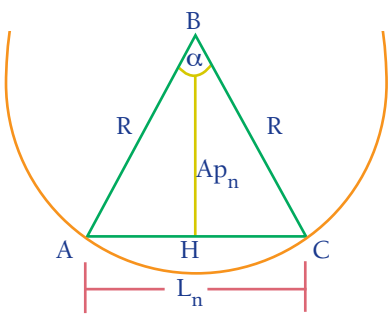
a.- El ángulo desigual es el ángulo central del polígono.

b.- El vértice del ángulo desigual es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono.

c.- Los lados iguales son los radios de la circunferencia circunscrita al polígono.

d.- La altura relativa a la base es el apotema del polígono.

e.- La base o lado desigual es el lado del polígono regular.



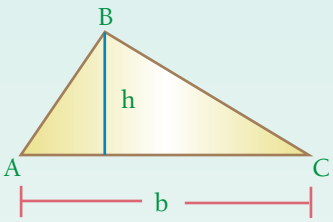
ÁREA DE LAS REGIONES PLANAS

REGIÓN

Es un espacio plano llamado "área" limitado por segmentos rectilíneos llamados "lados".

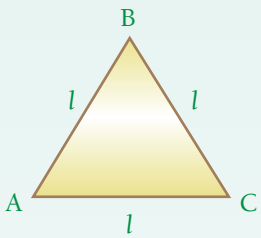
ÁREA DE TRIÁNGULOS

FÓRMULA BÁSICA



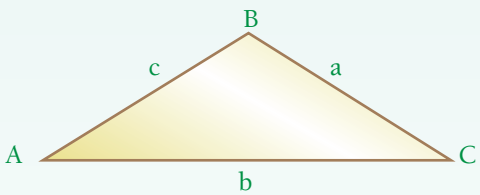
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

TRIÁNGULO EQUILATERO:



$$S = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO "p":

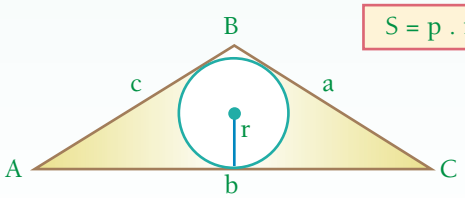


$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Donde: $p = \frac{a + b + c}{2}$

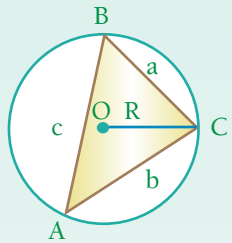
EN FUNCIÓN DE RADIO INSCRITO "r":

$$S = p \cdot r$$



Donde: $p = \frac{a + b + c}{2}$

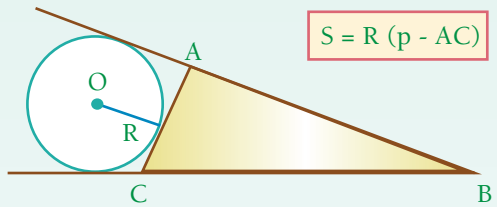
EN FUNCIÓN DEL RADIO CIRCUNSCRITO "R":



$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

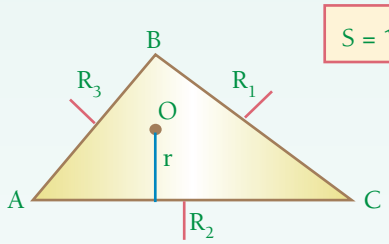
EN FUNCIÓN DEL RADIO EXINSCRITO "R"

$$S = R\,(p - AC)$$



EN FUNCIÓN DE LOS RADIOS INSCRITO "r" Y EX-INSCRITOS

$$S = \sqrt{rR_1R_2R_3}$$



LEYENDA:

S = superficie o área

B = base (un lado)

H = altura

L = lado

P = semiperímetro

2p = perímetro

R = radio del círculo circunscrito

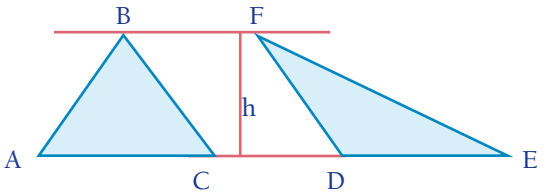
r = radio del círculo inscrito

a, b, c = lados del triángulo

RELACIÓN DE ÁREAS DE TRIÁNGULOS

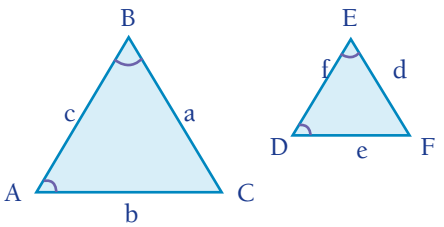
1.- Si dos triángulos tienen igual altura, sus áreas son entre sí como las bases respectivas.

$$\frac{S\,\Delta\ ABC}{S\,\Delta\ DEF} = \frac{AC}{DE}$$



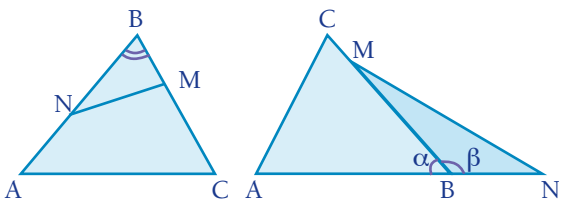
2.- Si dos triángulos son semejantes, sus áreas son entre sí como los cuadrados de sus elementos homólogos.

$$\frac{S\,\Delta\ ABC}{S\,\Delta\ DEF} = \frac{a^2}{d^2} = \frac{b^2}{e^2} = \frac{c^2}{f^2}$$



3.- Si dos triángulos tienen un ángulo igual (común) o suplementario, sus áreas son entre sí como los productos de los lados que forman ese ángulo igual (común) o suplementario.

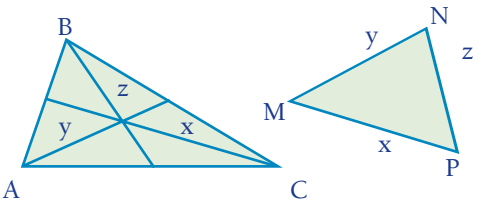
$$\frac{S\,\Delta\ ABC}{S\,\Delta\ MBN} = \frac{AB\ .\ AC}{BM\ .\ BN}$$



TEOREMA.-

El área del triángulo cuyos lados son medianas de un triángulo dado, es igual a los tres cuartos de área del triángulo dado.

$$S\,\Delta\ MNP = \frac{3}{4}\ S\,\Delta\ ABC$$

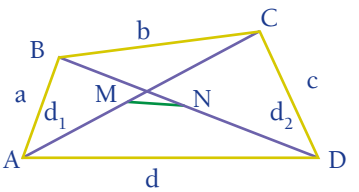


PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

1º TEOREMA DE EULER

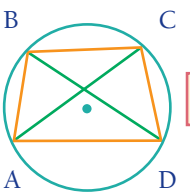
En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales, más cuatro veces el cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4MN^2$$



2º TEOREMA DE PTOLOMEO (1)

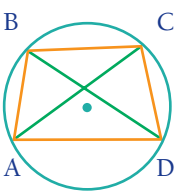
En todo ccuadrilátero inscrito o inscriptible a una circunferencia, la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.



$$AB\ .\ CD + BC\ .\ AD = AC\ .\ BD$$

3º TEOREMA DE PTOLOMEO (2)

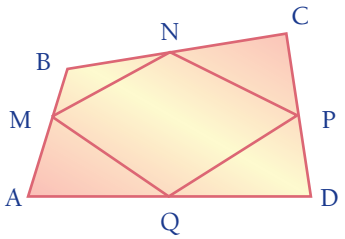
En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible a una circunferencia, las diagonales son entre sí, como la suma de los productos de los lados que concurren en los vértices que forman las respectivas diagonales.



$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB\ .\ AD + BC\ .\ CD}{AB\ .\ BC + AD\ .\ CD}$$

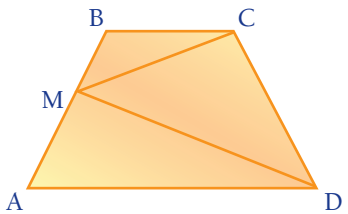
4º En todo cuadrilátero, si se une consecutivamente los puntos medios de los lados del cuadrilátero, se formará siempre un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero.

$$S_{\square\,MNPQ} = \frac{S_{\square\,ABCD}}{2}$$



5º En todo trapecio, si se une el punto de un lado no paralelo, con los vértices del otro lado no paralelo, se formará un triángulo cuya área es la mitad del área del trapecio.

$$S_{\Delta\,CMD} = \frac{S_{\square\,ABCD}}{2}$$



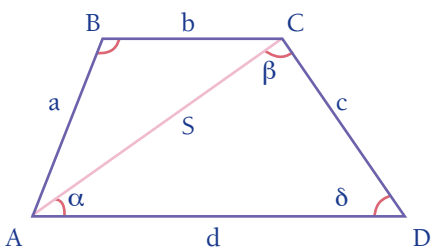
SEMEJANZA DE POLÍGONOS

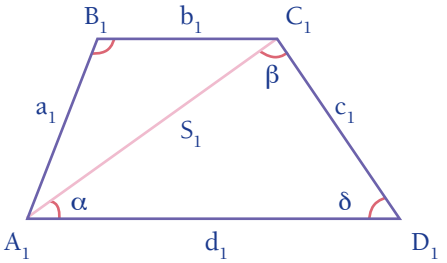
Para que dos polígonos del mismo número de lados sean semejantes, debe cumplirse dos condiciones:

1.- Que tengan sus ángulos respectivamente iguales.

2.- Que se les pueda descomponer en el mismo número de triángulos semejantes.

Satisfechas estas condiciones de semejanza, las relaciones métricas de dos polígonos semejantes son:





(1) Los elementos homólogos son proporcionales.

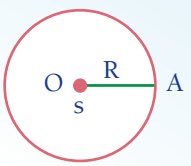
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

(2) Las áreas son entre sí, como los cuadrados de los elementos homólogos.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2} = \frac{d^2}{d_1^2}$$

ÁREAS DE LAS REGIONES CURVAS

CÍRCULO:

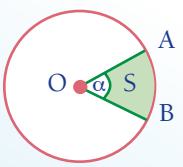


$$S = \pi R^2$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

D = diámetro

SECTOR CIRCULAR:

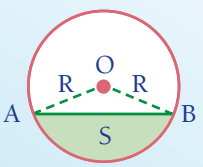


$$S_{secAOB} = \frac{\alpha \pi R^2}{360^o}$$

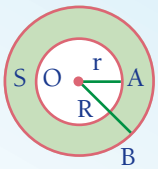
α = ángulo central

SEGMENTO CIRCULAR:

$$S_{seg} = S_{secAOB} - S_{\Delta\,AOB}$$



CORONA CIRCULAR:



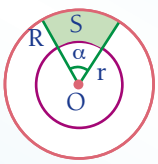
$$S = \pi\,(R^2 - r^2)$$

$$S = \frac{\pi\,(D^2 - d^2)}{4}$$

D = diámetro exterior

d = diámetro interior

TRAPECIO CIRCULAR



$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^o} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360^o}$$

$$S = \frac{\pi \alpha (R^2 - r^2)}{360^o}$$

LEYENDA:

S = superficie o área

S Δ = superficie o área del triángulo

S ▭ = superficie o área del cuadrilátero

R = radio exterior

r = radio interior

D = diámetro exterior

d = diámetro interior

S_{sec} = superficie o área del sector circular

S_{seg} = superficie o área del segmento circular

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

TEOREMAS FUNDAMENTALES

ÁNGULO TRIEDRO

O simplemente TRIEDRO, es un ángulo poliedro de tres caras. Sus elementos son:

* Tres caras o planos:

  ASB = a ; BSC = b ; ASC = c

* Tres diedros o aristas:

  SA ; SB: SC (o simplemente A; B; C)

* Un vértice:

El punto "S" donde concurren las tres caras o las tres aristas.

TEOREMA 1.-

En todo triedro, una cara debe ser mayor que la diferencia de las otras dos, pero menor que la suma de las mismas.

$$b - c < a < b + c$$

TEOREMA 2.-

En todo triedro, la suma de sus caras es mayor que cero grados, pero menor que cuatro rectos

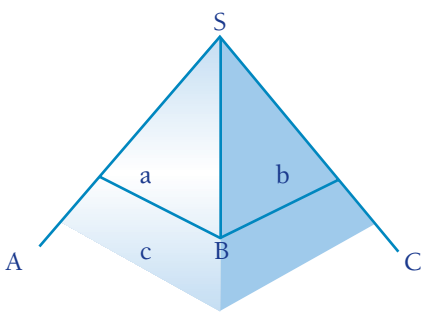
$$0 < a + b + c < 2\,\pi$$

Este teorema es aplicable también para todos los ángulos poliedros distintos al triedro.

TEOREMA 3.-

En todo driedro, la suma de los ángulos diedros es mayor que dos rectos, pero menor que seis rectos.

$$\pi < A + B + C < 3\,\pi$$



POLIEDROS

Poliedro es un sólido limitado por planos, que al cortarse y limitarse determinan sus caras, sus aristas y sus vértices.

TEOREMA DE EULER

TEOREMA 1.-

En todo poliedro, el número de aristas más dos, es igual al número de vértices más el número de caras.

$$\# A + 2 = \# V + \# C$$

TEOREMA 2.-

En todo poliedro, la suma de los ángulos formados en los vértices por las aristas, es igual a tantas veces cuatro rectos, como número de vértices tiene el poliedro menos dos.

$$S = 2\pi\ (\# V - 2)$$

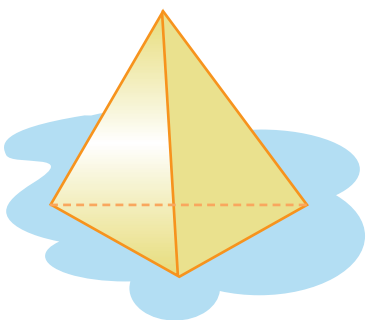
POLIEDRO REGULAR

Es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y cuyos ángulos poliedros son todos iguales.

Los poliedros regulares son sólo cinco: Tetraedro regular, Exaedro regular o cubo, Octaedro regular, Dodecaedro regular e Icosaedro regular.

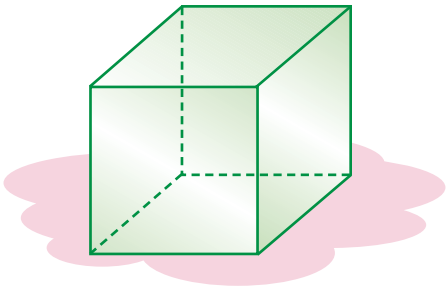
1) TETRAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **cuatro caras** iguales que son triángulos equiláteros unidos por los vértices de tres en tres.



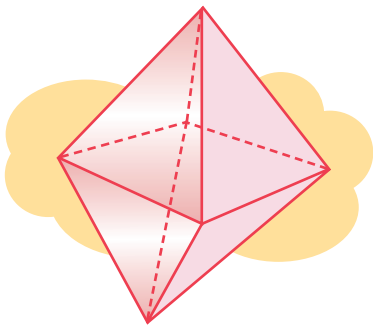
2) EXAEDRO REGULAR O CUBO

Poliedro regular formado por **seis caras** iguales, que son cuadradas, unidas por los vértices de tres en tres.



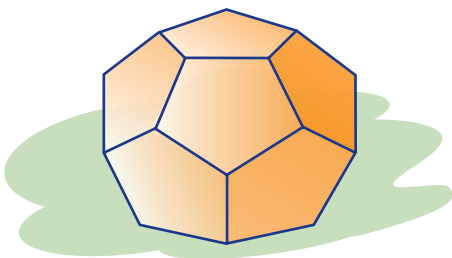
3) OCTAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **ocho caras** iguales que son triángulos equiláteros unidos por los vértices de cuatro en cuatro.



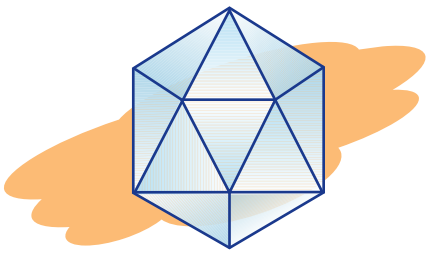
4) DODECAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **doce caras** iguales que son pentágonos regulares, unidos por los vértices de tres en tres.



5) ICOSAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **veinte caras** iguales que son triángulos equiláteros unidos por los vértices de cinco en cinco.



PRISMA

Es un poliedro, dos de cuyas caras son paralelas llamadas bases (iguales) y cuyas otras caras son paralelogramos (caras laterales).

ALTURA DE UN PRISMA

Es la longitud de la perpendicular común a las bases.

PRISMA RECTO

Es aquel cuyas aristales laterales son perpendiculares a las bases.

PRISMA OBLICUO

Es aquel cuyas aristas son oblicuas a las bases.

PRISMA REGULAR

Un prisma es regular cuando **tienen polígonos regulares** por **bases** y sus **aristas laterales son perpendiculares** a las bases.

SECCIÓN RECTA (SR)

Es la sección determinada por un plano perpendicular a las aristas laterales.

CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLIEDROS

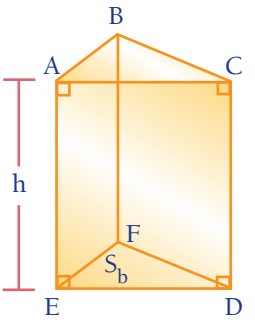
PRISMA RECTO

$S_L = 2p \cdot h$

$S_T = S_L + 2S_b$

$V = S_b \cdot h$

$V = S_b \cdot$ arista lateral



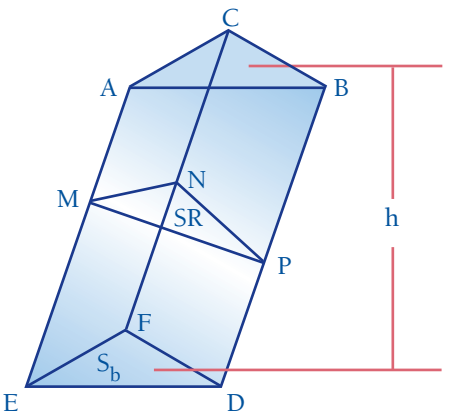
PRISMA OBLICUO

$S_L = 2p_{SR} \cdot$ arista lateral

$S_T = Sp_L + 25_b$

$V = S_b \cdot h$

$V = S_{SR} \cdot$ arista lateral



PARALELEPIPEDO RECTÁNGULAR

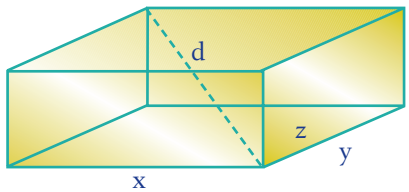
Es todo paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulares.

$S_L = 2xy + 2xz$

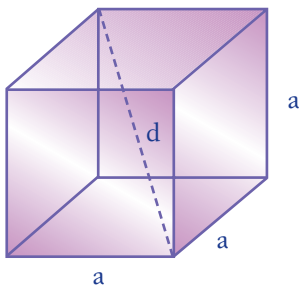
$S_T = 2xy + 2xz + 2yz$

$V = xyz$

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



CUBO



$S_L = 4a^2$

$S_T = 6a^2$

$V = a^3$

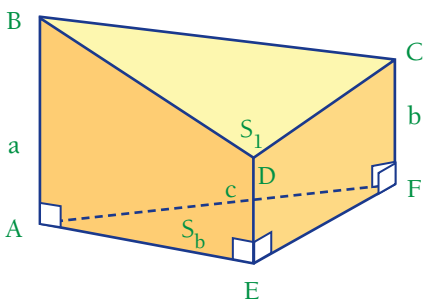
$d = a\sqrt{3}$

TRONCO DE PRISMA

Es la parte de un prisma comprendida entre una base y un plano no paralelo a las bases.

TRONCO DE UN PRISMA RECTO

Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a la base principal y sus caras laterales son trapecios rectángulares, siendo sus bases polìgonos cualesquiera y desiguales.



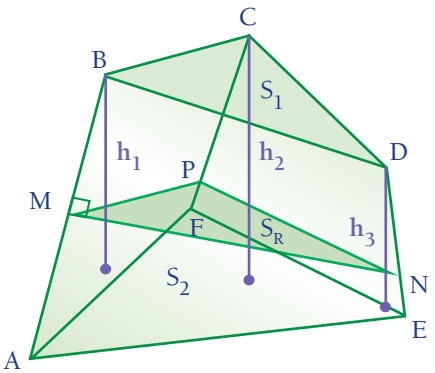
S_L = Suma de áreas de caras laterales

$S_T = S_L + S_b + S_1$

$V = S_b \cdot \dfrac{a + b + c}{3}$

TRONCO DE UN PRISMA OBLICUO

Es aquel cuyas aristas laterales son oblícuas a las bases, sus caras laterales son trapecios, sus bases polígonos cualesquiera y desiguales.



S_L = Suma de caras laterales

$S_T = S_L + S_1 + S_2$

$V = S_{SR} \cdot \dfrac{AB + FC + ED}{3}$

$V = S_2 \cdot \dfrac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$

PIRÁMIDE

Es un poliedro en el que una de las caras, llamada base, es un polígono cualquiera y las otras caras (laterales) son triángulos que tienen un vértice común.

ALTURA

Es la distancia del vértice de la pirámide, a la base.

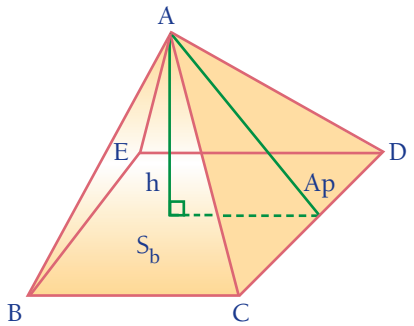
PIRÁMIDE REGULAR

Es aquella **cuya base es un polígono regular** y sus caras laterales son triángulos isósceles iguales.

La altura de una pirámide regular pasa por el centro de la circunferencia inscrita o circunscrita a la base de la pirámide.

APOTEMA DE LA PIRÁMIDE REGULAR

Es la altura de los triángulos isósceles que forman sus caras laterales.



$$S_L = p \cdot Ap$$

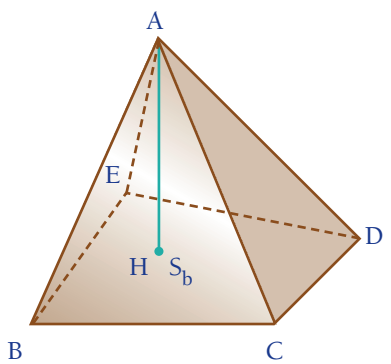
$$S_T = S_L + S_b$$

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

PIRÁMIDE IRREGULAR

Es una pirámide cuya **base es un polígono irregular** y las caras laterales son triángulos desiguales.

> NOTA.-
>
> Si la pirámide es irregular, pero sus aristas laterales son iguales, la altura pasará por el centro de la circunferencia circunscrita a la base.

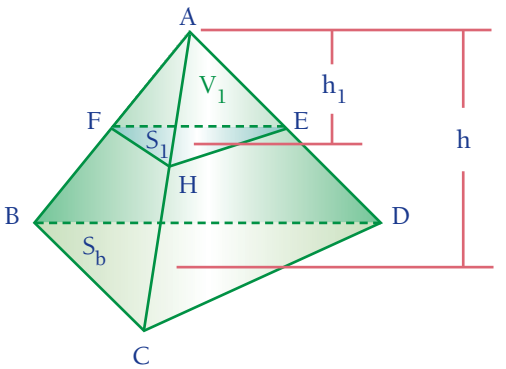


$$S_T = S_L + S_b$$

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

SEMEJANZA DE PIRÁMIDES

Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base se obtiene una pirámide pequeña, adyacente y semejante a la total, y recìprocamente, entonces:



1.- Las áreas de sus bases son entre sí como los cuadrados de los elementos homólogos.

$$\frac{S_1}{S_b} = \frac{h^2}{h^2} = \frac{AF^2}{AB^2} = \frac{AH^2}{AC^2} = \frac{FH^2}{BC^2}$$

2.- Sus volúmenes son entre sí, como los cubos de sus elementos homólogos.

$$\frac{V_1}{V} = \frac{h^3}{h^3} = \frac{AF^3}{AB^3} = \frac{AH^3}{AC^3}$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la parte de una pirámide **comprendida entre la base y una sección determinada** por un plano paralelo o no a la base. Esta sección y la base son denominadas bases del tronco; siendo las caras laterales, trapecios.

ALTURA DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la longitud de la perpendicular trazada de una base a la otra.

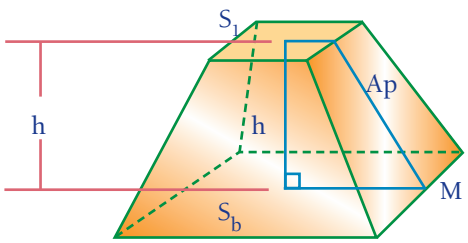
Los troncos de pirámides pueden ser regulares o irregulares.

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Se llama así, cuando sus bases son polígonos regulares y paralelos, y sus caras laterales son trapecios isósceles e iguales.

APOTEMA DEL TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es la altura de los trapecios que forman las caras laterales y une los puntos medios de las bases de estos trapecios.



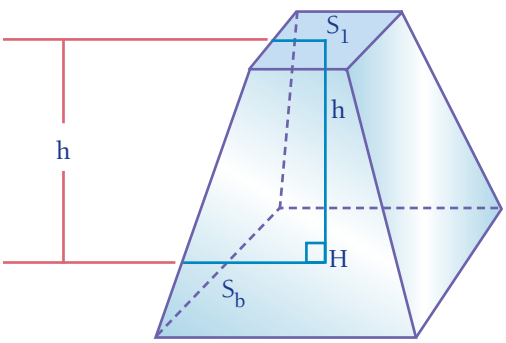
$$S_L = Ap\ (p + p_1)$$

$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \frac{h\left(S_1 + S_b + \sqrt{S_1 \cdot S_b}\right)}{3}$$

TRONCO DE PIRÁMIDE IRREGULAR

Sus bases son paralelas, sus caras laterales son trapecios cualesquiera.



$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \frac{h\left(S_1 + S_b + \sqrt{S_1 \cdot S_b}\right)}{3}$$

EL CONO

Se llama cono a todo sólido limitado por una superficie cónica y por la sección del plano que corta a todas las generatrices de la superficie cónica, determinándose la base del cono.

DEFINICIONES

ALTURA DE UN CONO

Es la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice del cono a su base.

CONO CIRCULAR

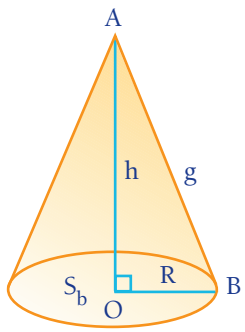
Es el que tiene por base un círculo.

CONO RECTO

Llámese cono recto al cono circular cuyo eje es perpendicular al círculo de la base en su centro. El eje de un cono recto se confunde con la altura.

CONO DE REVOLUCIÓN

Llámase cono de revolución, o recto, al que se supone engendrado por la rotación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

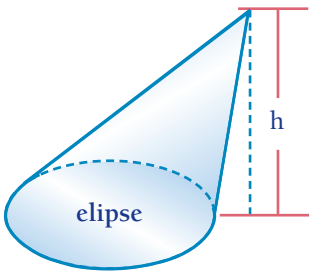


$$S_L = \pi \cdot R \cdot g \qquad S_T = S_L + S_b$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \qquad V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

CONO OBLICUO

Es aquel cuya base es una elipse y cuyo eje no es perpendicular a la base.



$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

o:

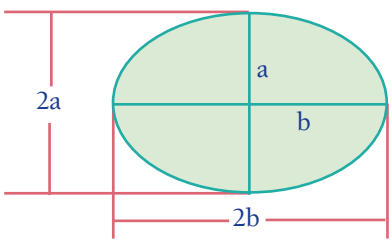
$$V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h}{3}$$

ELIPSE

a = radio mínimo

b = radio máximo

$$S = \pi ab$$



SEMEJANZA DE CONOS

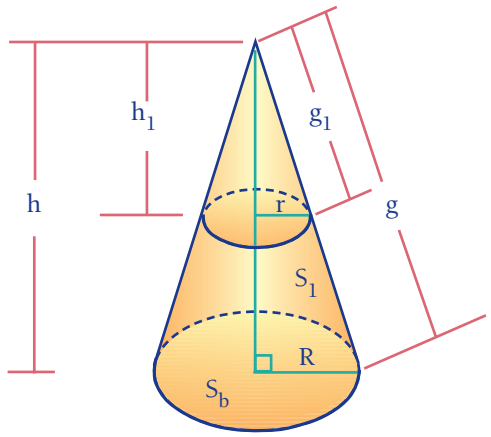
Si se corta un cono cualesquiera por un plano paralelo a su base, se obtiene un cono pequeño o deficiente semejante al total y recíprocamente, entonces:

1.- Las áreas de las bases son entre sí como los cuadrados de los elementos homólogos.

2.- Los volúmenes son entre sí como los cubos de sus elementos homólogos.

$$\frac{S_1}{S_b} = \frac{h_1^2}{h^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{g_1^2}{g^2}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{h_1^3}{h^3} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{g_1^3}{g^3}$$

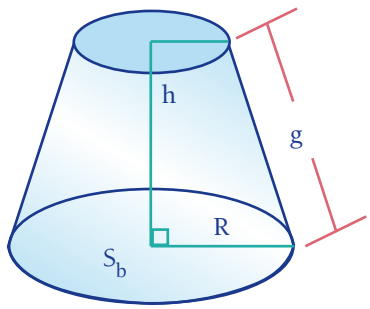


TRONCO DE CONO

Es la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela o no a la base. A la sección y a la base del cono se les llama bases del tronco de cono.

ALTURA DE UN TRONCO DE CONO RECTO

Es la distancia entre sus bases. La altura pasa por los centros de las bases.



$$S_L = \pi \cdot g\,(R + r)$$

$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \frac{\pi \cdot h(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$$

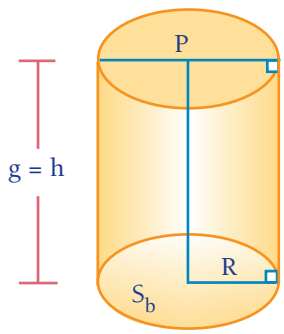
EL CILINDRO

Llámese cilindro a un sólido limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies planas paralelas llamadas bases.

Los términos base, altura y área lateral son usados como en los prismas.

CILINDRO RECTO

Un cilindro es recto cuando su generatriz es perpendicular a las bases.



$$S_L = 2\pi \cdot R \cdot g$$

$$S_T = S_L + 2S_b$$

$$S_T = 2\pi R(g + R)$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot g$$

Cilindro recto o de revolución, es el que se considera generado por la rotación de un rectángulo alrededor de unos de sus lados.

CILINDRO OBLICUO

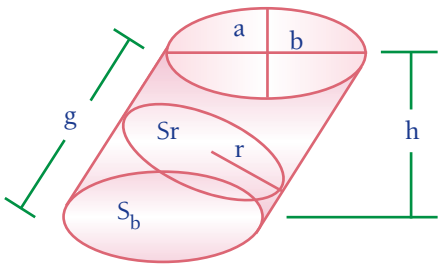
Cuando sus generatrices son oblícuas a las bases. Algunas veces sus bases son elipses y otras círculos.

$$S_L = 2\pi \cdot r \cdot g$$

$$S_T = S_L + 2S_b$$

$$S_T = \pi \cdot a \cdot b \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot g$$

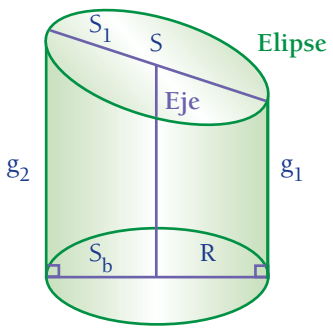


TRONCO DE CILINDRO

Es la parte de un cilindro comprendida entre una sección no paralela a la base del cilindro y una base de éste.

TRONCO DE CILINDRO RECTO

Cuando sus generatrices son perpendiculares a una base (principal) pero no a la otra.



$$S_L = 2\pi \cdot R \cdot EJE$$

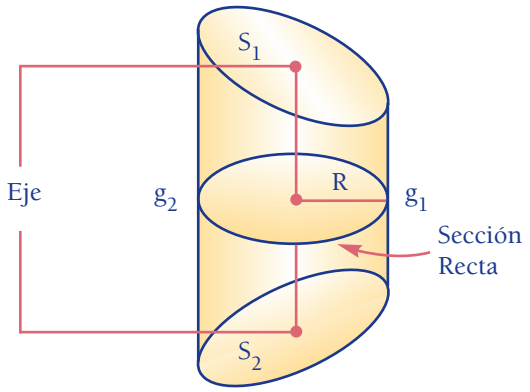
$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot EJE$$

$$EJE = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

TRONCO DE CILINDRO OBLICUO

Si sus generatrices son oblícuas a las bases.



$$S_L = 2\pi \cdot R \cdot EJE$$

$$S_T = S_L + S_1 + S_2$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot EJE$$

$$EJE = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

LA ESFERA

Es un sólido, limitado por una superficie curva, en la cual todos los puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

La mitad de una esfera se llama hemisferio o semiesfera.

CÍRCULO MÁXIMO

Es el círculo que se obtiene al trazar un plano por el centro de la esfera.

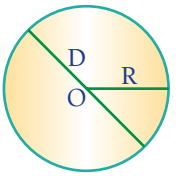
SUPERFICIE Y VOLUMEN DE LA ESFERA

$$S = 4\pi \cdot R^2$$

$$V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$$

$$S = \pi \cdot D^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot D^3}{6}$$



PARTES DE ÁREA DE ESFERA

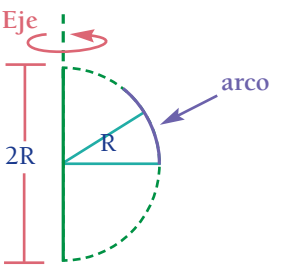
Estas son: la zona y el huso esférico.

1.- ZONA

Llámase zona esférica o zona simplemente, a la parte de la superficie de una esfera comprendida entre dos circunferencias paralelas llamadas bases.

La distancia entre las bases se llama altura de la zona.

Se la considera generada por la rotación de un arco de circunferencia que gira alrededor de un diámetro.



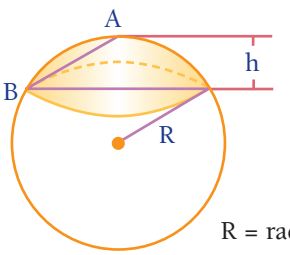
La zona puede ser de una base y de dos bases. A la de una base, se le llama también "casquete esférico".

ZONA DE UNA BASE O CASQUETE

$$S = 2\pi \cdot R \cdot h$$

o:

$$S = \pi \cdot \overline{AB}^2$$



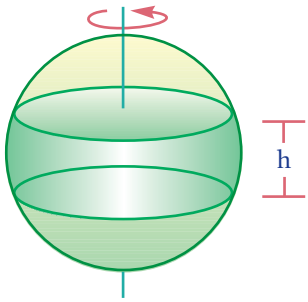
R = radio de esfera

H = altura de la zona

AB = cuerda del arco generador

ZONA DE DOS BASES

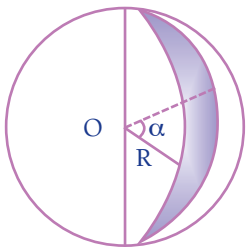
$$S_L = 2\pi \cdot R \cdot h$$



2.- HUSO ESFÉRICO

Llamado también "lúnula", es la parte de la superficie de una esfera limitada por las semicircunferencias de dos círculos máximos.

$$S = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{360^o}$$



R = radio de la esfera

α = ángulo del huso

PARTES DE VOLUMENES DE UNA ESFERA

Estas son: segmento esférico, cuña esférica, sector esférico y anillo esférico

1.- SEGMENTO ESFÉRICO

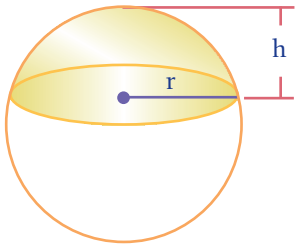
Es la porción de esfera limitada por una zona y por bases circulares.

Hay de dos clases:

segmento esférico de una base y segmento esférico de dos bases.

a. SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Limitado por un casquete y un círculo por base.



$$S_T = S_{CASQUETE} + S_{CÍRCULO}$$

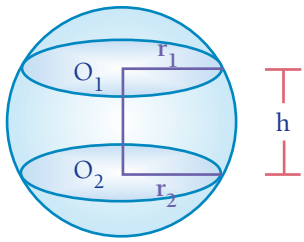
$$V = \frac{\pi \cdot h^3}{6} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2}$$

h = altura de la zona

r = radio de la base de la zona

b.- SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Es parte del volumen de la esfera comprendida entre dos planos paralelos.



$$S_T = S_{\text{zona de dos bases}} + S_{\text{círculo1}} + S_{\text{círculo2}}$$

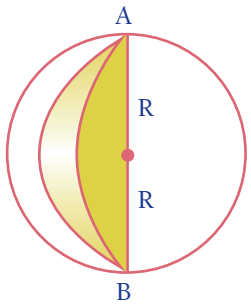
$$V = \frac{\pi \cdot h^3}{6} + \pi \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \right) h$$

h = altura de la zona

r_1, r_2 = radios de las bases.

2. -CUÑA ESFÉRICA

Es la parte de volumen de una esfera limitada por un huso y dos semicírculos máximos.



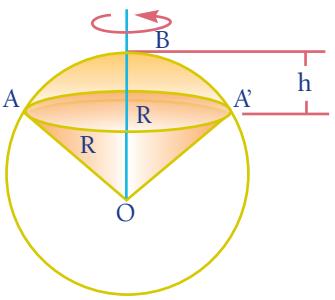
$$S_T = \pi R^2 + \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{90^o}$$

$$V = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^3}{270^o}$$

3.- SECTOR ESFÉRICO

Es la parte del volumen de esfera generado por un "sector circular" que gira alrededor de un eje que pasa por el centro, en dos posiciones:

a.- Cuando el radio del sector circular coincide con el eje de giro: está limitado por un casquete esférico y una superficie lateral cónica.



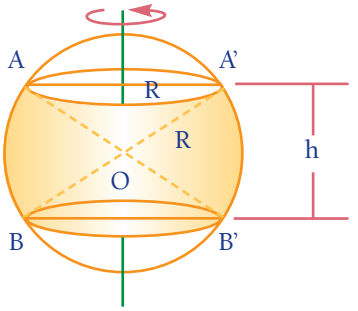
$$S_T = S_{CASQUETE} + S_{LCONO}$$

$$V = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

h = altura del casquete

R = radio de la esfera

b.- Cuando el radio no coincide con el eje de giro: está limitado por una zona de dos bases y áreas laterales de dos conos.



$$S_T = S_{\text{zona de dos bases}} + S_{LCONO\,1} + S_{LCONO\,2}$$

$$V = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

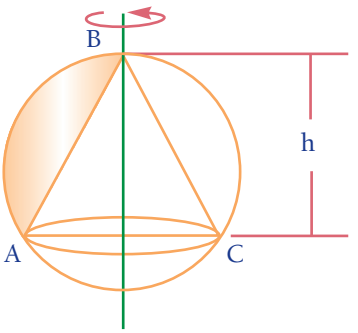
h = altura de la zona

R = radio de la esfera

4.- ANILLO ESFÉRICO

Es el volumen generado por un segmento circular que gira alrededor de un eje que pasa por su centro, en tres posiciones:

a.- Cuando un extremo de la cuerda del segmento circular pertenece al eje; está limitada por un casquete esférico y el área lateral de un cono.



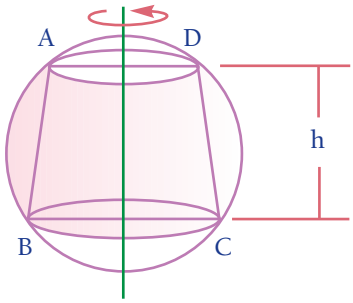
$$S_T = S_{Casquete} + S_{Lcono}$$

$$V = \frac{\pi \cdot AB^2 \cdot h}{6}$$

AB = cuerda del segmento circular

h = altura de la zona o casquete

b.- Cuando la cuerda del segmento circular no es paralela al eje de giro: está limitado por una zona de dos bases y el área lateral de un tronco de cono.



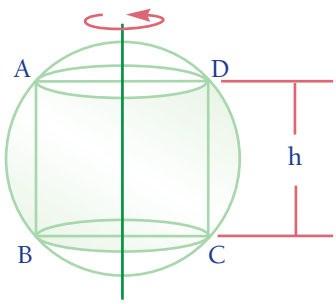
$$S_T = S_{zona} + S_{Ltronco}$$

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot h}{6}$$

AB = cuerda del segmento circular

h = altura de la zona.

c.- Cuando la cuerda del segmento circular es paralela al eje del giro: está limitado por una zona de dos bases y el área lateral de un cilindro.



$$S_T = S_{zona} + S_{Lcilindro}$$

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot h}{6}$$

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^3}{6}$$

AB = cuerda del segmento circular

h = altura de la zona

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

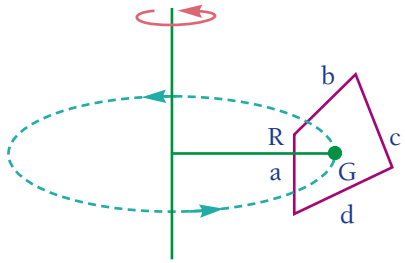
TEOREMA DE GULDIN PAPPUS (ÁREAS)

"La superficie de un sólido de revolución es igual al perímetro (2p) de la figura móvil multiplicado por la longitud (L) de la línea recorrida por el centro de gravedad de la citada figura".

$$S = 2p \cdot L$$

$2p = a + b + c + d$

L = longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad = $2\pi R$

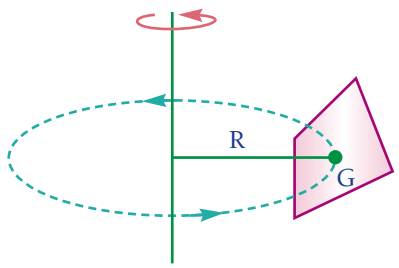


TEOREMA DE GULDIN PAPPUS (VOLUMEN)

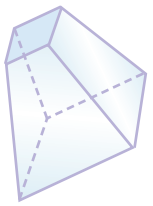
"El volumen de un sólido de revolución es igual al área (S) de la figura móvil, multiplicada por la longitud (L) de la línea recorrida por el centro de gravedad del cuerpo".

$$V = S \cdot L$$

L = longitud de la línea descrita por el centro de gravedad = $2\pi R$



LEYENDA GENERAL



V = volumen

S_T = superficie o área total

S.R. = sección recta

$2p$ = perímetro de la base principal

S_b = superficie o área de la base principal

p' = semiperímetro de la base secundaria

h = altura

g_1, g_2 = generatrices

S_L = superficie o área lateral

S_2 = superficie o área de la base secundaria

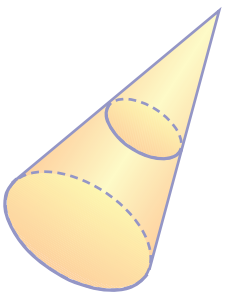
$S_{S.R.}$ = superficie o área de la base recta

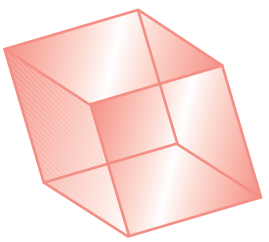
p = semiperímetro

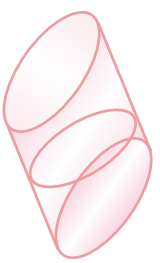
R, r = radios

S_1 = superficie o área de la base secundaria

g = generatrices







TRIGONOMETRÍA

DEFINICIÓN

Es aquella parte de la matemática elemental que estudia la medida de los tres ángulos de un triángulo en relación con sus lados.

MEDIDA DE ÁNGULOS

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Hay tres sistemas para medir los ángulos; Sexagesimal, Centesimal y Radial.

SEXAGESIMAL

Toma como unidad de medida un arco que es igual a la 360 ava parte de la circunferencia, y a cada parte se le llama grado sexagesimal. Se simboliza así: º

Ejemplo: 30º Se lee: 30 grados sexagesimales

CENTESIMAL

Toma como unidad de medida un arco que es igual a la 400 ava parte de la circunferencia, y a cada parte se le llama grado centesimal. Se simboliza así: g.

Ejemplo: 40 g. Se lee: 40 grados centesimales

RADIAL

Toma como unidad de medida un arco de una longitud igual a la de su radio, y a esta longitud de arco se le llama radián. Se simboliza así: rad.

Ejemplo: 2,16 rad. Se lee: 2,16 radianes.

VALOR DE π

$\pi = \frac{22}{7}$ (Arquímides)

$\pi = \frac{355}{113}$ (Mecio)

EQUIVALENCIA ENTRE LOS TRES SISTEMAS

1 circunferencia < > 360º < > 400 < > 2π rad.

1º < > 60' y 1' < > 60"

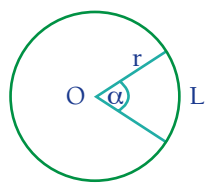
1 g < > 100 min y 1 min < > 100 s

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

LONGITUD DE UN ARCO:

$$L = r \cdot \alpha$$

α : ángulo central, debe estar en radianes



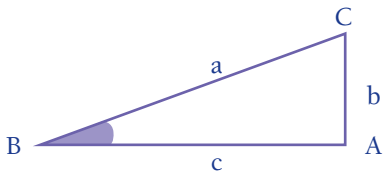
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

FUNCIONES BÁSICAS

$\text{sen } B = \frac{b}{a}$ $\cos B = \frac{c}{a}$

$\text{tg } B = \frac{b}{c}$ $\text{ctg } B = \frac{c}{b}$

$\sec B = \frac{a}{c}$ $\text{cosec} = \frac{a}{b}$



TABLAS DE VALOR DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE TRIÁNGULOS NOTABLES

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º Y 60º (30º = π/6 Y 60º = π/3)

$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

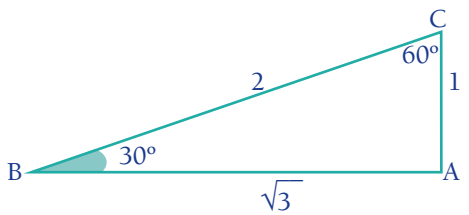
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$

$\text{ctg } 30^\circ = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{ctg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\sec 60^\circ = 2$

$\text{cosec } 30^\circ = 2$ $\qquad$ $\text{cosec } 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

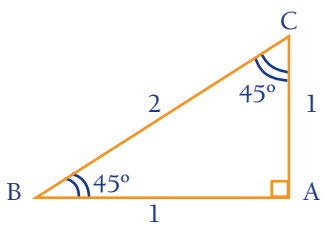


VALORES DE LAS FUNCIONES DE 45º (45º = π/4)

$\text{sen } 45^a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } 45^\circ = 1$ $\qquad$ $\text{ctg } 45^\circ = 1$

$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\text{cosec } 45^\circ = \sqrt{2}$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 37º y 53º (37º = π/4,865 y 53º ≃ π/3,396)

$\text{sen } 37^\circ = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\text{sen } 53^\circ = \frac{4}{5}$

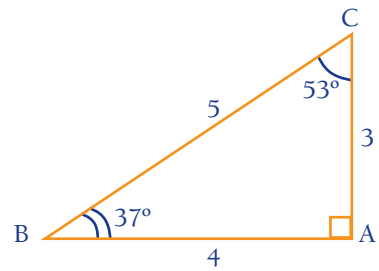
$\cos 37^\circ = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos 53^\circ = \frac{3}{5}$

$\text{tg } 37^\circ = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\text{tg } 53^\circ = \frac{4}{3}$

$\text{ctg } 37^\circ = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\text{ctg } 53^\circ = \frac{3}{4}$

$\sec 37^\circ = \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\sec 53^\circ = \frac{5}{3}$

$\text{cosec } 37^\circ = \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\text{cosec } 53^\circ = \frac{5}{4}$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 15º y 75º (15º = π/12 y 75º = π/2,4)

$\text{sen } 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

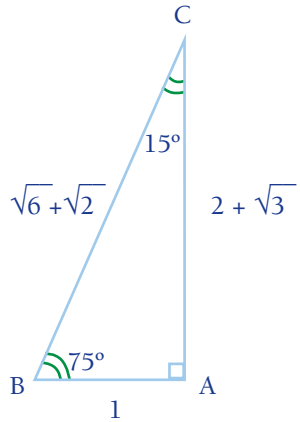
$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\text{tg } 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{tg } 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

$\text{ctg } 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{ctg } 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

$\sec 15^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\qquad$ $\sec 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

$\text{cosec } 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ $\qquad$ $\text{cosec } 75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 16º y 74º (16º = π/11,25 y 74º ≃ π/2,43)

$$\text{sen } 16º = \frac{7}{25} \qquad \text{sen } 74º = \frac{24}{25}$$

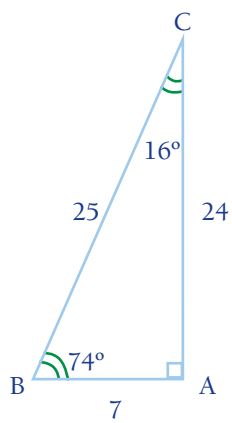
$$\cos 16º = \frac{24}{25} \qquad \cos 74º = \frac{7}{25}$$

$$\text{tg } 16º = \frac{7}{24} \qquad \text{tg } 74º = \frac{24}{7}$$

$$\text{ctg } 16º = \frac{24}{7} \qquad \text{ctg } 74º = \frac{7}{24}$$

$$\sec 16º = \frac{25}{24} \qquad \sec 74º = \frac{25}{7}$$

$$\text{cosec } 16º = \frac{25}{7} \qquad \text{cosec } 74º = \frac{25}{24}$$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 18º Y 72º (18º = π/10 Y 72º = π/2,5)

$$\text{sen } 18º = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{sen } 72º = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

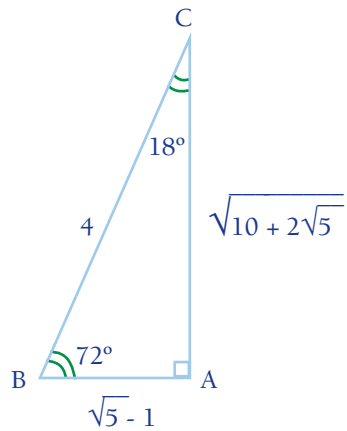
$$\cos 18º = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \cos 72º = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{tg } 18º = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \text{tg } 72º = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\text{ctg } 18º = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \qquad \text{ctg } 72º = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

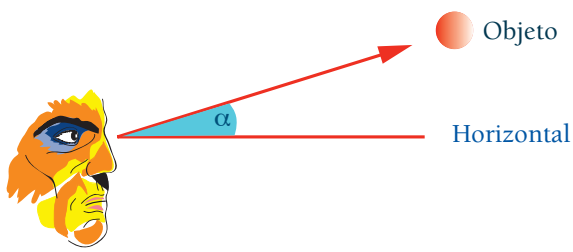
$$\sec 18º = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \sec 72º = \sqrt{5}+1$$

$$\text{cosec } 18º = \sqrt{5}+1 \qquad \text{cosec } 72º = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$$

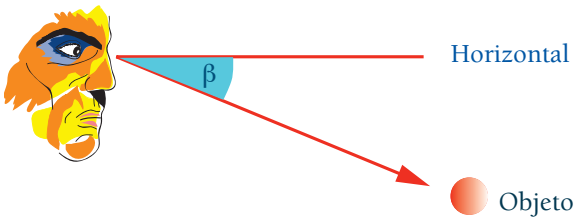


ÁNGULOS DIRECTRICES

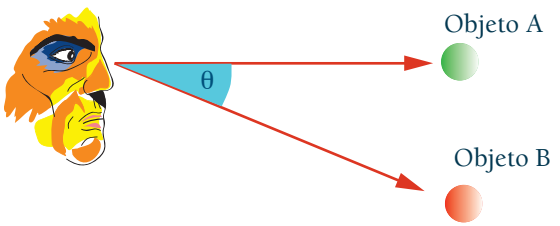
Ángulo de Elevación:



Ángulo de Depresión:



Ángulo que Subtiende:



Los ángulos de elevación (α) y depresión (β) siempre están en plano vertical. El ángulo que subtiende (θ) dos objetos observados puede estar en cualquier plano.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES EN EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO DE RADIO = 1

sen a = PM

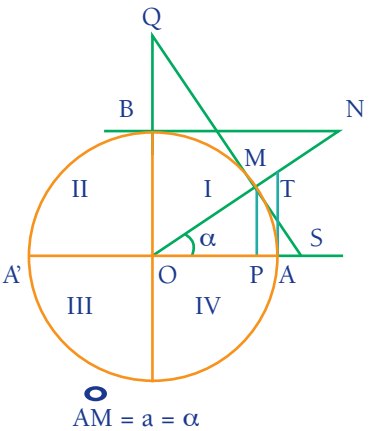
cos a = OP

tg a = AT

ctg a = BN

sec a = OS

cosec a = OQ



SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-
secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	c: de 0 a 1	d: de 1 a 0	d: de 0 a -1	c: de -1 a 0
coseno	d: de 1 a 0	d: de 0 a -1	c: de -1 a 0	c: de 0 a 1
tangente	c: de 0 a ∞	c: de -∞ a 0	c: de 0 a ∞	c: de -∞ a 0
cotangente	d: de ∞ a 0	d: de 0 a -∞	d: de ∞ a 0	d: de 0 a -∞
secante	c: de 1 a ∞	c: de -∞ a – 1	d: de -1 a -∞	d: de ∞ a 1
cosecante	d: de ∞ a 1	c: de 1 a ∞	c: de - ∞ a -1	d: de -1 a - ∞

c = crece ; d = decrece

INTERVALO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Intervalo es el espacio o valor dentro de dos extremos en el cual se encuentra el valor de la función. Se denota así:

[ ] intervalo cerrado

⟨ ⟩ intervalo abierto

⟨] intervalo abierto cerrado

[⟩ intervalo cerrado abierto

sen x ε [-1; + 1]

cos x ε [-1; + 1]

tg x ε ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩

ctg x ε ⟨ -∞ ; + ∞⟩

sec x ε ⟨ -∞ ; -1] v [+1; + ∞ ⟩

cosec x ε ⟨ -∞ ; -1] v [+1; + ∞ ⟩

DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En las funciones trigonométricas, DOMINIO es el valor del ángulo o arco; RANGO es el valor de la función. Las funciones trigonométricas no son BIUNIVOCAS; es decir, para un ángulo hay más de un valor para su función, repitiéndose dentro de un período.

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO	PERÍODO
sen x	∀ x	[-1; +1]	2π
cos x	∀ x	[-1; +1]	2π
tg x	$\forall x - \{2n + 1\} \frac{\pi}{2}$	ℝ o ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩	π
ctg x	∀ x - {nπ}	ℝ o ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩	π
sec x	$\forall x - \{2n + 1\} \frac{\pi}{2}$	ℝ - ⟨ -1; +1⟩	2π
cosec x	∀ x - {nπ}	ℝ - ⟨ -1; +1⟩	2π

ℝ = número real

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$$

$$\text{tg } a \,.\, \text{ctg } a = 1$$

$$1 + \text{tg}^2 a = \sec^2 a$$

$$\text{ctg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$$

$$\text{sen } a \,.\, \text{cosec } a = 1$$

$$\cos a \,.\, \sec a = 1$$

$$1 + \text{ctg}^2 a = \text{co sec}^2 a$$

RELACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN TÉRMINOS DE UNA SOLA

	sen a	cos a	tg a	ctg a	sec a	cosec a
sen		$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\dfrac{1}{\text{cosec } a}$
cos a	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}$		$\dfrac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$	$\dfrac{\text{ctg } a}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}}$	$\dfrac{1}{\cos a}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a-1}}{\text{cosec } a}$
tg a	$\dfrac{\text{sen } a}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$		$\dfrac{1}{\text{ctg } a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a-1}}$
ctg a	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}{\text{sen } a}$	$\dfrac{\cos a}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{1}{\text{tg } a}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a-1}$
sec a	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}$	$\dfrac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}}{\text{ctg } a}$		$\dfrac{\text{cosec } a}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a-1}}$
cosec a	$\dfrac{1}{\text{sen } a}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}{\text{tg } a}$	$\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}$	$\dfrac{\sec a}{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}}$	

ARCOS COMPUESTOS

FUNCIONES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ARCOS

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a \,.\, \cos.\, b \pm \text{sen}\,b \,.\, \cos a$$

$$\cos\,(a \pm b) = \cos a \,.\, \cos \,.\, b \mp \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,b$$

$$\text{tg}\,(a \pm b) = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b}$$

$$\text{ctg}\,(a \pm b) = \frac{\text{ctg}\,a \,.\, \text{ctg}\,b \mp 1}{\text{ctg}\,b \pm \text{ctg}\,a}$$

FUNCIONES DE LA SUMA DE TRES ARCOS

$$\text{sen}\,(a + b + c) = \text{sen}\,a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,b \,.\, \text{sen}\,c + \text{sen}\,b \,.\, \cos a \,.\, \cos c + \text{sen}\,c \,.\, \cos a \,.\, \cos b$$

$$\cos\,(a + b + c) = \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \text{sen}\,b \,.\, \text{sen}\,c \,.\, \cos a - \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,c \,.\, \cos b - \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,b \,.\, \cos c$$

$$\text{tg}\,(a+b+c) = \frac{\text{tag}\,a + \text{tg}\,b + \text{tg}\,c - \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b \,.\, \text{tg}\,c}{1 - \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b - \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,c - \text{tg}\,b \,.\, \text{tg}\,c}$$

EQUIVALENCIA DE LAS FUNCIONES DE LOS ARCOS COMPLEMENTARIOS

Sean: $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ y "a" dos arcos complementarios:

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + a = \frac{\pi}{2}$$

se cumple:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen}\,a$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{ctg}\,a$$

Ejemplo:

$$\text{sen}\,40^\circ = \cos 50^\circ$$

puesto que:

$$40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$$

EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES DE LOS ARCOS SUPLEMENTARIOS

Sean: $(\pi - a)$ y "a" dos arcos suplementarios, entonces:

$$(\pi - a) + a = \pi$$

se cumple:

$$\text{sen}\,(\pi - a) = \text{sen}\,a$$

$$\cos\,(\pi - a) = -\cos a$$

$$\text{tg}\,(\pi - a) = -\text{tg}\,a$$

Ejemplos:

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$$

notar que:

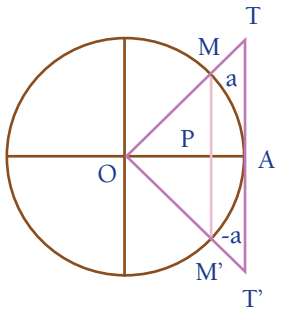
$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\text{tg}\,130^\circ = -\text{tg}\,50$$

EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ARCOS NEGATIVOS

Sean "a" y "-a" dos arcos iguales pero de signo cotrario. Es decir, del mismo origen pero de sentido contrario. (En el gráfico todos de origen A).

sen a = MP	;	sen (-a) = M'P = -MP
cos a = OP	;	cos (-a) = OP = OP
tg a = AT	;	tg (-a) = AT' = -AT



Luego:

$$\text{sen}\,(-a) = -\text{sen}\,a$$

$$\text{cosec}\,(-a) = -\text{cosec}\,a$$

$$\cos\,(-a) = \cos a$$

$$\sec\,(-a) = \sec a$$

$$\text{tg}\,(-a) = -\text{tg}\,a$$

$$\text{ctg}\,(-a) = -\text{ctg}\,a$$

FUNCIONES DE ARCOS DOBLES

$$\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a\,.\,\cos a$$

$$\text{sen}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 + \text{tg}^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \text{tg}^2 a}{1 + \text{tg}^2 a}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$

$$\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

FUNCIONES DE ARCO MITAD

$$1 - \cos a = 2\,\text{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \text{tg}^2\frac{a}{2}$$

FUNCIONES DE ARCOS TRIPLES

$$\text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a - 4\,\text{sen}^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\text{tg}\,3a = \frac{3\,\text{tg}\,a - \text{tg}^3 a}{1 - 3\,\text{tg}^2 a}$$

FUNCIONES AUXILIARES

$$\text{seno verso}\,a = 1 - \cos a$$

$$\cos\text{verso}\,a = 1 - \text{sen}\,a$$

$$\text{ex-sec}\,a = \sec a - 1$$

NOTA: A la **ex-secante** se le llama también **external**.

TRANSFORMACIÓN A PRODUCTO

SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\,\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}$$

$$\text{sen}\,A - \text{sen}\,B = 2\cos\frac{A + B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A - B}{2}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE COSENOS

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1. En el primer cuadrante se cumple que el arco es mayor que el seno pero menor que su tangente.

$$\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a$$

o:

$$0 < a < \frac{\pi}{2}$$

2. Cuando el arco es muy pequeño; es decir, cercano a cero, el seno, el arco y la tangente tienden a confundirse.

y:

$$\lim_{a \to 0} \frac{a}{\operatorname{sen} a} = 1$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{a}{\operatorname{tg} a} = 1$$

De donde:

$$\operatorname{sen} a = a = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow a \to 0$$

Ejemplo:

¿Cuál es el límite de $\dfrac{3x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$, cuando x tiende a cero? ($x \to 0$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \frac{2x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{6 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

$$= 6 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = 6 \cdot 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = 6$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Son expresiones que dan el valor del ángulo "en forma indicada".

Sea "A" un arco ó ángulo:		denotación inglesa	denotación francesa
sen A = m	⇒	A = arco sen m	A = sen^{-1} m
cos A = n	⇒	A = arco cos n	A = $\cos^{-1}$ n
tg A = p	⇒	A = arco tg p	A = tg^{-1} p
ctg A = q	⇒	A = arco ctg q	A = ctg^{-1} q
sec A = r	⇒	A = arco sec r	A = $\sec^{-1}$ r
cosec A = s	⇒	A = arco cosec s	A = $\operatorname{cosec}^{-1}$ s

De donde:

sen (arco sen m) = m ⇔ arco sen (sen A) = A

cos (arco cos n) = n ⇔ arco cos (cos A) = A

tg (arco tg p) = p ⇔ arco tg (tg A) = A

Ejemplo: Calcular

$$y = \text{arco sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{arco tg}\,\frac{1}{2} + \text{arco sec}\,\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad (1)$$

Procedimiento. Llamando:

$$A = \text{arco sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$$

$$B = \text{arco tg}\,\frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg } B = \frac{1}{2}$$

$$C = \text{arco sec}\,\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \text{sec } C = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \text{tg } C = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo en (1):

$$y = A + B + C$$

o sea:

$$y = 60 + B + C$$

$$y - 60 = B + C$$

tomando tangente:

$$\text{tg } (y - 60) = \text{tg } (B + C)$$

$$\text{tg } (y - 60) = \frac{\text{tg } B + \text{tg } C}{1 - \text{tg } B \,.\, \text{tg } C}$$

sustituyendo valores de tg B y tg C:

$$\text{tg } (y - 60) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

$$\text{tg } (y - 60) = 1$$

$$y - 60 = 45^\circ$$

$$y = 105^\circ$$

DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES INVERSAS

En las funciones inversas, como su nombre lo indica, el DOMINIO de una función es el RANGO de la inversa y viceversa, consideradas dentro de un INTERVALO.

FUNCIÓN INVERSA	DOMINIO	RANGO
arco sen x	$[-1\,;+1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
arco cos x	$[-1\,;+1]$	$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
arco tg x	$\mathbb{R}$ o $\langle -\infty\,;\,+\infty\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
arco ctg x	$\mathbb{R}$ o $\langle -\infty\,;\,+\infty\rangle$	$\langle 0;\pi\rangle$
arco sec x	$\langle -\infty\,;\,-1] \cup [1\,;+\infty\rangle$	$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$
arco cosec x	$\langle -\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right\rangle \cup \left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La solución puede ser la más pequeña de todas (solución principal) o puede ser una expresión algebraica que incluya todos los arcos que satisfagan la ecuación dada (solución general).

Expresión de todos los arcos que tienen la misma función trigonométrica.

Que tienen el mismo seno:

$$X = K\pi + (-1)^k \alpha$$

α = solución principal

Que tiene el mismo coseno:

$$X = 2K\pi \pm \beta$$

β = solución principal

Que tienen la misma tangente:

$$X = K\pi + \theta$$

θ = solución principal

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Para resolver ecuaciones debe tenerse presente que:

$\text{sen } x = a$	$\Rightarrow$	$x = \text{sen}^{-1} a$	$\wedge$	$X = k\pi + (-1)^K \text{sen}^{-1} a$
$\cos x = b$	$\Rightarrow$	$x = \cos^{-1} b$	$\wedge$	$X = 2k\pi \pm \cos^{-1} b$
$\text{tg } x = c$	$\Rightarrow$	$x = \text{tg}^{-1} c$	$\wedge$	$X = k\pi + \text{tg}^{-1} c$
$\text{ctg } x = d$	$\Rightarrow$	$x = \text{ctg}^{-1} d$	$\wedge$	$X = k\pi + \text{ctg}^{-1} d$
$\sec x = e$	$\Rightarrow$	$x = \sec^{-1} e$	$\wedge$	$X = 2k\pi \pm \sec^{-1} e$
$\text{cosec } x = f$	$\Rightarrow$	$x = \text{cosec}^{-1} f$	$\wedge$	$X = k\pi + (-1)^K \text{cosec}^{-1} f$

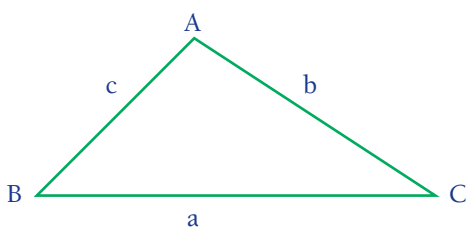
Donde: $K \in \mathbb{Z}$; x = solución principal y X = solución general

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para resolver triángulos que equivale a calcular sus lados o sus ángulos, debe conocerse las siguientes leyes o propiedades:

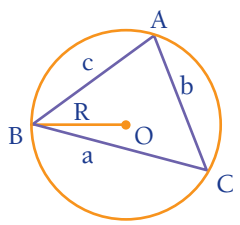
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Ley de los senos: En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a sus lados opuestos.



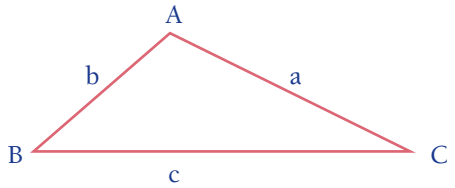
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

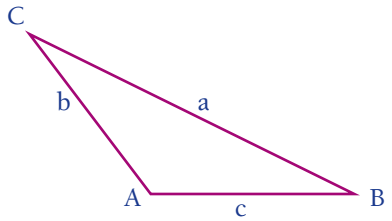
2. Corolario: En todo triángulo inscrito en una circunferencia, la relación de la Ley de los senos es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.



$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

3. Ley de cosenos (Carnot).- Para todo triángulo:



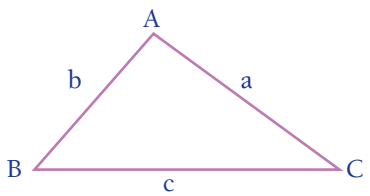


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \cos B$$

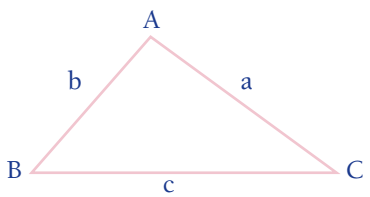
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \cos C$$

4. Ley de las tangentes (Nepper).- Para todo triángulo:



$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}$$

5. Ley de las proyecciones.- Para todo triángulo:



$$a = b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B$$

$$b = a \,.\, \cos C + c. \cos A$$

$$c = a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos C$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS (Fórmula de Briggs)

Si:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

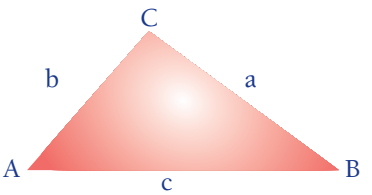
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{(p - b)(p - c)}}$$

CÁLCULO DE SUPERFICIES

Fórmula Trigonométricas



$$S = \frac{a \,.\, b}{2} \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{b \,.\, c}{2} \operatorname{sen} A \qquad \text{(I)}$$

$$S = \frac{a \,.\, c}{2} \operatorname{sen} B$$

Fórmulas Geométricas

$$S = p \,.\, r \qquad S = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \qquad \text{(II)}$$

$$S = \rho a \,(p - a)$$

Donde:

p = semiperímetro

r = radio círculo inscrito

R = radio círculo circunscrito

ρa = radio del círculo exinscrito al lado a

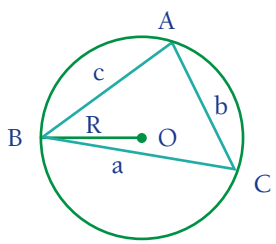
ELEMENTOS SECUNDARIOS EN LA SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para calcular los elementos secundarios, lo aconsejable es despejar las fórmulas conocidas, tales como las siguientes:

RADIOS

RADIO CIRCUNSCRITO:

Es el radio "R" de la circunferencia circunscrita al triángulo.



1.- De: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } A}$

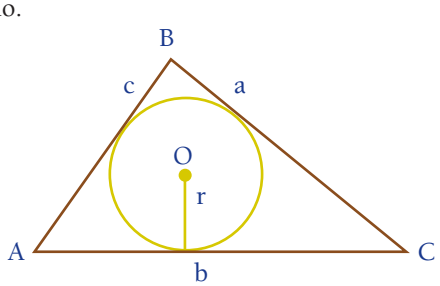
$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\text{sen}A}$$

2.- De: $\dfrac{abc}{4R} = S$

$$\Rightarrow R = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4 \,.\, S}$$

RADIO INSCRITO O INRADIO:

Es el radio "r" de la circunferencia inscrita en el triángulo.



1.- De: $pr = S$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

2.- De: $\dfrac{r}{p - a} = \text{tg}\,\dfrac{A}{2}$

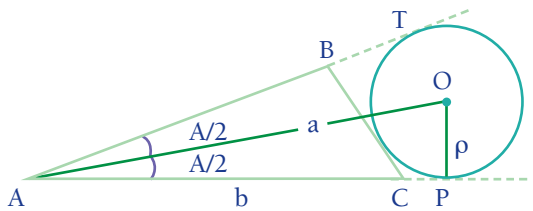
$$\Rightarrow r = (p - a)\text{tg}\,\frac{A}{2}$$

3.- De: $a = r\left(\text{ctg}\,\dfrac{B}{2} + \text{ctg}\,\dfrac{C}{2}\right)$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{\text{ctg}\,\dfrac{B}{2} + \text{ctg}\,\dfrac{C}{2}}$$

RADIO EX-INSCRITO:

Es el radio "ρ" de la circunferencia, ex-inscrito a uno de los lados del triángulo.



De la propiedad:

$AP = AT = \dfrac{a + b + c}{2}$, se demuestra:

1.- $\dfrac{a + b + c}{2} \,.\, \text{tg}\,\dfrac{A}{2}$

o :

$$\rho = p \,.\, \text{tg}\,\frac{A}{2}$$

2.- De: $S = \rho\,(p - a)$

o:

$$\rho = \frac{S}{p - a}$$

3.- De: $a = \rho \left(tg \frac{B}{2} + tg \frac{C}{2} \right)$

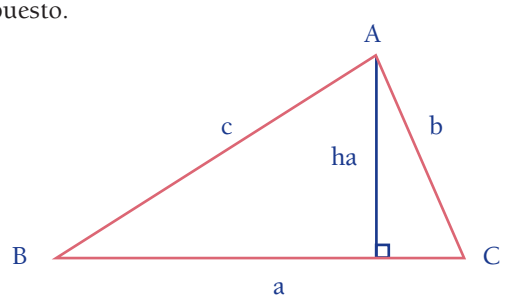
$$\Rightarrow \rho = \frac{a}{tg \frac{B}{2} + tg \frac{C}{2}}$$

CEVIANAS

Son rectas que partiendo de un vértice tocan un punto del lado opuesto. Las principales son: altura, mediana, bisectriz interna y bisectriz externa.

ALTURA

Es la perpendicular trazada de un vértice al lado opuesto.



1.- $ha = b \cdot sen\ C$

o:

$ha = c \cdot sen\ B$

2.- $ha = 2 \cdot R \cdot sen\ b \cdot sen\ C$

3.- $ha = \frac{2 \cdot S}{a}$

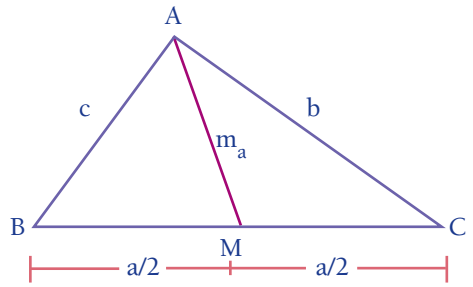
ha = altura con respecto al lado "a"

MEDIANA

Es la recta trazada de un vértice al punto medio del lado opuesto.

1.- De: $b^2 + c^2 = 2 \cdot m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2}$$

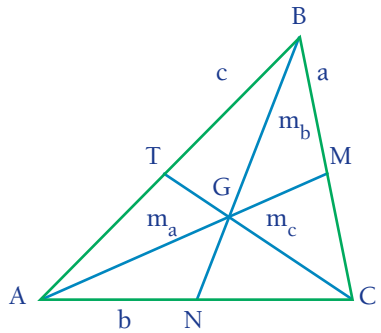


2.- $m_b^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - a \cdot c \cdot \cos B$

$m_c^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - a \cdot b \cdot \cos C$

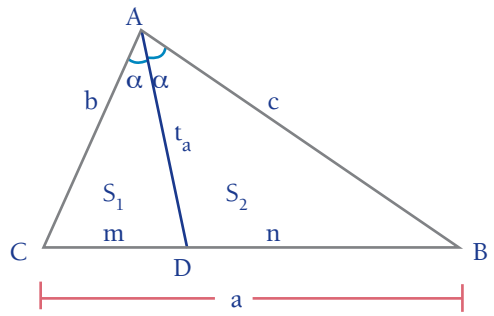
$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

La intersección de las tres medianas se denomina CENTRO DE GRAVEDAD o BARICENTRO.



BISECTRIZ INTERIOR

Es la recta que divide a un ángulo interior en dos ángulos iguales.



Fórmulas Geométricas:

1.- $\frac{b}{n} = \frac{c}{m}$

2.- $t_a^2 = b \cdot c - m \cdot n$

Fórmula Trigonométrica:

$$t_a = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b + c} \cos \frac{A}{2}$$

La intersección de las tres bisectrices interiores se llama INCENTRO.

BISECTRIZ EXTERIOR

Es la recta que divide a un ángulo exterior en dos ángulos iguales.

Fórmulas Geométricas:

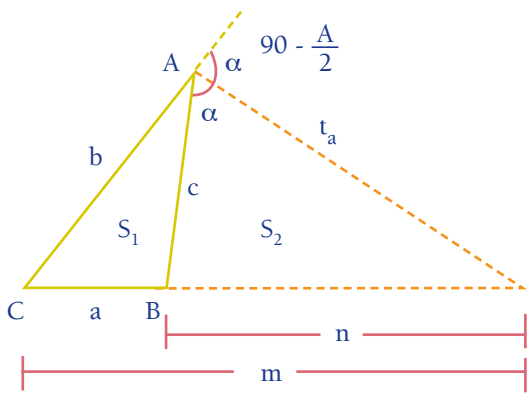
1.- $\frac{b}{n} = \frac{c}{m}$

2.- $t_a^2 = m \cdot n - b \cdot c$

Fórmula Trigonométrica:

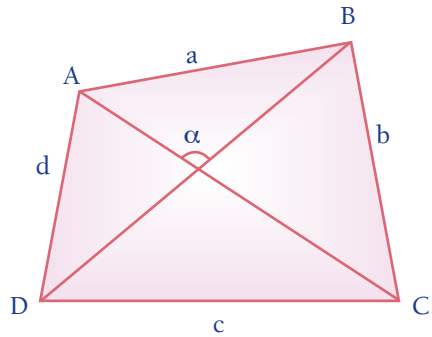
$$t_a = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b - c} \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

La intersección de las tres bisectrices interiores se llama EXCENTRO.



CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Son cuadriláteros cuyos ángulos son menores que 180º.



SUPERFICIES

1.- $S = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha$

2.- $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - a.b.c.d.\cos \alpha}$

donde:

p = semiperímetro

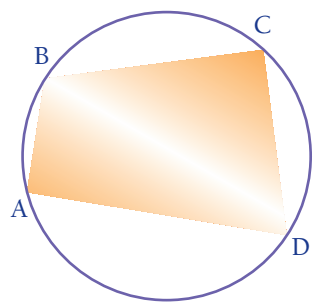
$$\alpha = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$$

o :

$$\alpha = \frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO O CICLÍCO

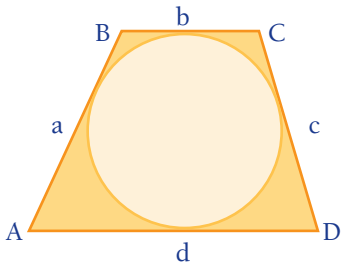
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^o$$



$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

Fórmula de Brahma-Gupta

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO



Propiedad de Pitot:

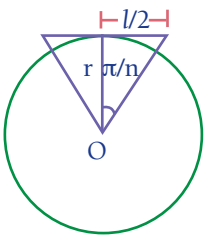
$$a + b = c + d = p$$

POLÍGONOS REGULARES

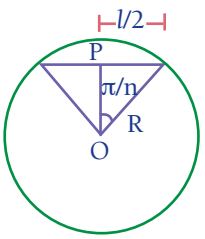
CIRCUNSCRITOS:

Valor del lado "l" y la del área "S"

$$l = 2r \cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{n} \qquad S = n \cdot r^2 \cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{n}$$



INSCRITOS:



Cálculo del lado "*l*", apotema "Ap" y área "S"

$$l = 2r \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

$$Ap = R \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

$$S = \frac{R^2 \cdot n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

OP = Ap

n = número de lados

R = radio circunscrito

S = área

PROBLEMA DE POTHENOT-SNELLIUS

Conocido también como problema de los cuatro puntos o problema de la carta (geográfica):

Dados tres puntos no colineales: A, B y C, calcular sus distancias a un cuarto punto D (situado en el plano ABC, interno al ángulo convexo ACB), desde el cual se vean las distancias AC y BC bajo ángulos dados. Se supone como incógnitas los ángulos x e y.

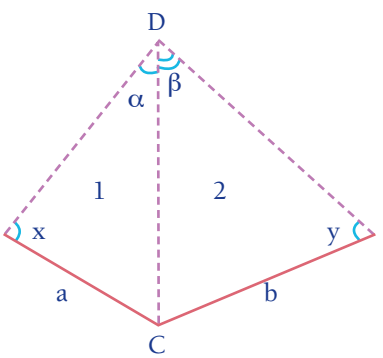
Por ley de senos en los triángulos (1) Y (2):

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{DC}}{a}$$

$$\frac{\text{sen } y}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{DC}}{b}$$

$$\therefore \qquad \frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{b \text{ sen } \alpha}{a \text{ sen } \beta} \qquad (1)$$

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C) \qquad (2)$$



Como a, b, α, β, y $\hat{C}$ se conoce, se tiene un sistema de ecuaciones trigonométricas cuyas incógnitas son "x" e "y". Hallando "x" e "y" el problema queda resuelto, al conocer todos los ángulos y un lado de cada uno de los triángulos (1) y (2).

FÍSICA

Es la ciencia que tiene por objeto el estudio de los cuerpos, sus leyes y propiedades mientras no cambie su composición, así como el de los agentes naturales con los fenómenos que en los cuerpos producen su influencia.

La física puede dividirse de un modo general en dos: Física Experimental y Física Matemática. En la primera, la labor de investigación tiene a obtener sólo datos y axiomas de la Física matemática. Esta última a su vez, partiendo de esos datos experimentales, establece principios de los cuales se deduce, mediante los recursos del cálculo, fórmulas generales.

DEFINICIONES

FENÓMENO

Toda apariencia o manifestación del orden material o espiritual.

ENERGÍA

Causa capaz de transformarse en trabajo mecánico.

MAGNITUD

Tamaño o cantidad de un cuerpo.

MEDIDA

Expresión comparativa de las dimensiones o cantidades.

DIMENSIÓN

Longitud, extensión o volumen de una línea, de una superficie o de un cuerpo, respectivamente. A partir de Einstein, se considera la cuarta dimensión: "el tiempo".

CANTIDAD

Todo lo que es capaz de un aumento o disminución y puede, por consiguientes, medirse o contarse.

ECUACIONES DIMENSIONALES

Son expresiones de la forma algebraica que, valiéndose de las unidades fundamentales representadas por las letras M, F, L, T, se usa para probar fórmulas, equivalencias o para dar unidades a una respuesta (M: masa; F: fuerza; L: longitud; T: tiempo).

SISTEMAS DE UNIDADES

UNIDADES DEL SISTEMA ABSOLUTO

Sub-sistema	L	M	T
CGS	cm	g	s
MKS	m	kg	s
FPS	pie	lb	s

UNIDADES DEL SISTEMA TÉCNICO, GRAVITACIONAL O PRÁCTICO

Sub-sistema	L	F	T
CGS	cm	g	s
MKS	m	kg	s
FPS	pie	lb	s

UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDA "SI"

UNIDADES DE BASE			
MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Longitud	metro	m	L
Tiempo	segundo	s	T
Masa	kilogramo	kg	M
Intensidad de corriente Eléctrica	amperio	A	I
Temperatura	kelvin	K	θ
Intensidad Luminosa	candela	ca	J
Cantidad de sustancia	mol	mol	N

UNIDADES SUMPLEMENTARIAS		
MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
Ángulo	radián	rad
Ángulo sólido	estereo radián	sr

UNIDADES DERIVADAS		
MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
Área	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad	kilogramo por Metro cúbico	kg/m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Fuerza y peso	newton	N
Presión	pascal	Pa

Ejemplo:

Determinar la ecuación dimensional del peso específico.

Procedimiento:

Sabiendo que: $Pe = \frac{W}{V}$

Pero:

$$W = F = m \cdot a = M \cdot \frac{d}{t^2} = M\frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

y : $V = L^3$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$Pe = \frac{MLT^{-2}}{L^3}$$

$$Pe = ML^{-2}T^{-2}$$

CONVENCIONES BÁSICAS

a) La suma o resta de unidades iguales produce la misma unidad:

$$6T + 8T - T - 7T = T$$

b Las constantes y los coeficientes numéricos se reemplaza por 1:

$$5M - 6{,}5M + 9{,}8M = M$$

$$\pi + 10L = 1 + L = L$$

c) Se escriben en forma de enteros, si hay denominados se escribe con potencia de signo negativo para darle la forma de entero.

Ejemplo: $\frac{LM}{T^2} = LMT^{-2}$

d) El signo | | significa "ecuación dimensional de".

e) La dimensión de un ángulo o función trigonométrica es un número, como tal dimensionalmente es 1.

$$|60^\circ| = 1$$

$$|\text{cosec } 45^\circ| = 1$$

f) Dimensionalmente los logaritmos valen 1.

$$|\log 8| = 1$$

$$|\log_n 17| = 1$$

VECTORES

Vector significa "que conduce". Los vectores sirven para representar: fuerza, velocidad, aceleración, etc.

MAGNITUD

La magnitud expresa el tamaño de un cuerpo o la dimensión de algún fenómeno. Puede ser escalar o vectorial.

MAGNITUD ESCALAR O MODULO

Es aquella que está plenamente determinada por un número y una unidad de medida o especie.

Ejemplos:

i) L = 18 yardas

ii) m = 14 lb

iii) t = 6 semanas

MAGNITUD VECTORIAL

Es aquella que además de tener "un número y una especie" tiene dirección y sentido:

Ejemplos:

i) $\vec{a} = 9{,}8 m/s^2$

ii) $\vec{F} = 15$ newton

iii) $\vec{V} = 30$ km/h

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN VECTOR

Se representa por un segmento de una recta orientada. Se utiliza para representar fuerzas, pesos, aceleraciones, etc.

SUMA Y RESTA DE VECTORES

A.- MÉTODOS GEOMÉTRICOS

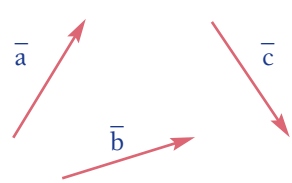
- MÉTODO POLÍGONAL O POLÍGONO FUNICULAR

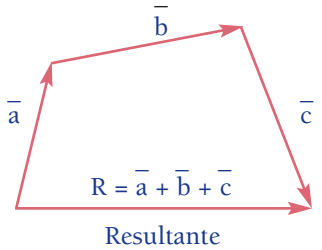
SUMA.- Para sumar vectores:

Se traza, en un mismo plano, los vectores uno a continuación del otro, respetando su magnitud, dirección y sentido se une el origen del primero con el extremo del último y este trazo es la resultante con su magnitud, dirección y sentido.

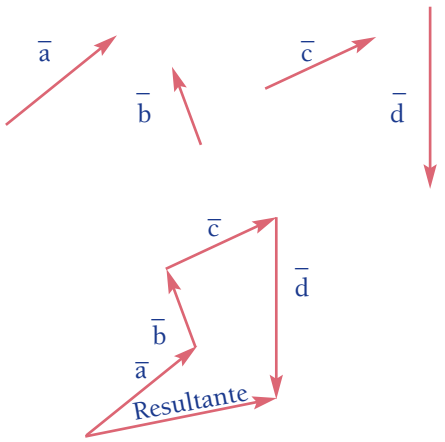
Ejemplos: Sumar los vectores:

i) $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$





ii) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$

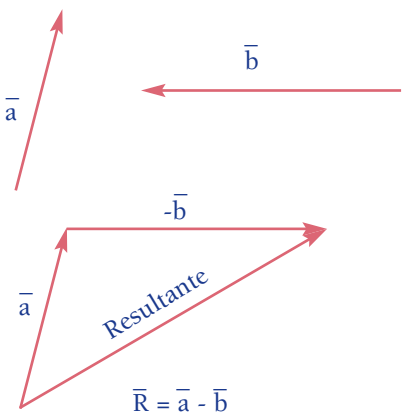


$R = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$

DIFERENCIA

Se traza el vector minuendo y a continuación el sustraendo **pero en sentido contrario**. Se une el origen del primero con el extremo del segundo y se obtiene la resultante con su magnitud, dirección y sentido.

Ejemplo: Restar $\bar{a} - \bar{b}$



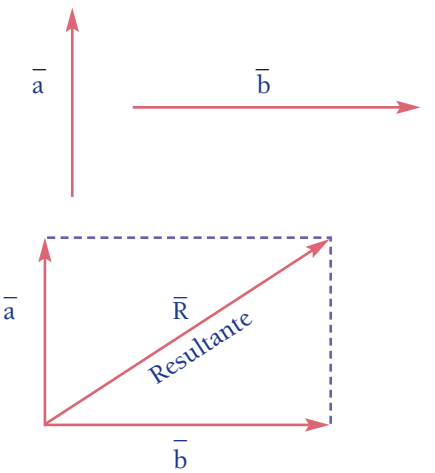
• MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

SUMA

Se traza los dos vectores que se va a sumar, partiendo de un mismo punto, luego se completa el paralelogramo; la diagonal es la resultante.

Ejemplo:

Sumar los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$



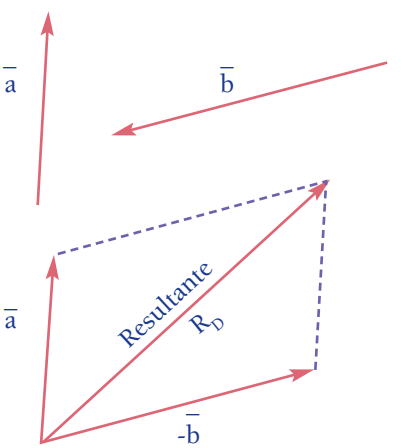
$\bar{R} = \bar{a} + \bar{b}$

RESTA

Se traza el vector minuendo y luego el vector sustraendo partiendo de ambos del mismo origen pero el sustraendo con sentido contrario. La diagonal del paralelogramo formado es la resultante.

Ejemplo:

Restar: $\bar{a} - \bar{b}$



B.- MÉTODOS ANALITICOS

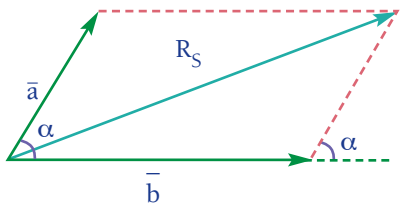
Consiste en calcular algebraicamente la resultante.

• MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

SUMA

Resultante de la suma $\vec{a} + \vec{b}$

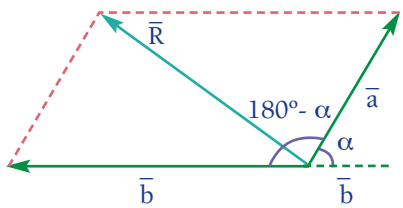
$$R_S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha}$$



RESTA

Resultante de la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$

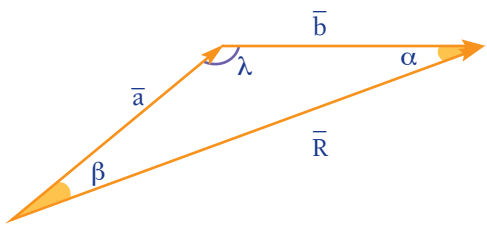
$$R_S = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha}$$



• RESULTANTE POR LEY DE SENOS

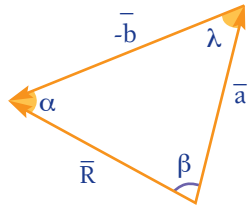
SUMA: Sumar $\bar{a} + \bar{b}$

$$\frac{R}{\text{sen } \lambda} = \frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$



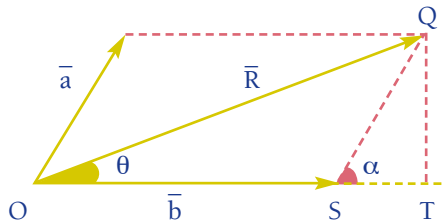
DIFERENCIA: Restar a - b

$$\frac{R}{\text{sen } \lambda} = \frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$



DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE

Está dada por el ángulo que forma la resultante con uno de los vectores.



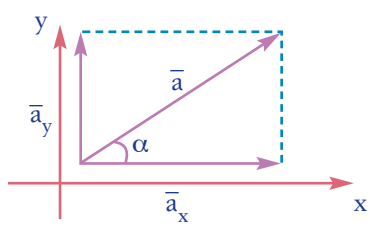
$$\text{sen } \theta = \frac{a \cdot \text{sen } \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \text{ sen } \alpha}}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{a \cdot \text{sen } \theta}{b + a \cdot \cos \theta}$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN SUS ELEMENTOS RECTANGULARES

Por el origen del vector ($\bar{a}$) que se quiere descomponer, se traza un sistema de ejes perpendiculares (eje rectangulares), sobre estos ejes . Se proyecta el vector, la proyección sobre el eje "x", se llama "componente horizontal a_x", la proyección sobre el "eje y" se llama "componente vertical a_y".

Ejemplo:



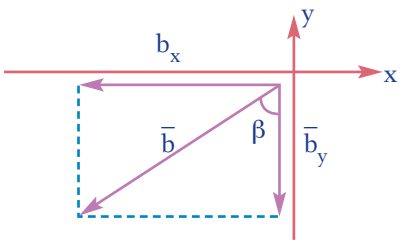
a_x : componente hortizontal.

a_y : componente vertical.

Donde: $a_x = a \cos \alpha$

$a_y = a \operatorname{sen} \alpha$

Otro ejemplo:



RESULTANTE POR DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

Hallar la resultante de $\bar{a} + \bar{b}$

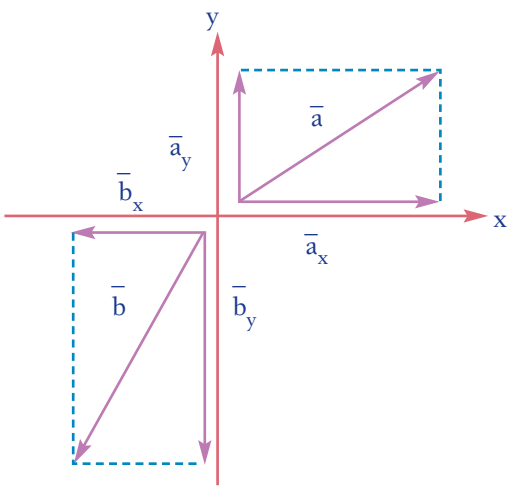
Se descompone a y b en el sistema de ejes rectangulares.

R_x = suma de componentes horizontales.

R_y = suma de componentes verticales.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

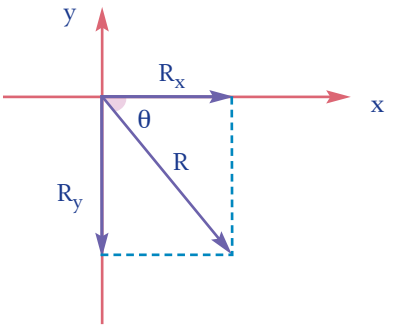
R = resultante final o suma de $\bar{a} + \bar{b}$



Para hallar $\bar{R}_x$ y $\bar{R}_y$, se suma algebraicamente los vectores que están sobre los ejes x e y:

$$\bar{a}_x + \bar{b}_x = \bar{R}_x$$

$$\bar{a}_y + \bar{b}_y = \bar{R}_y$$



Finalmente:

$$\bar{R}_x + \bar{R}_y = \bar{R} \Rightarrow \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R$$

DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

MECÁNICA

Mecánica es la parte de la Física que trata del movimiento y de las fuerzas que pueden producirlo, consideradas con toda generalidad, así como del efecto que producen en las máquinas. Tienen tres partes:

1.- Mecánica de sólidos:

a) Cinemática

b) Estática

c) Dinámica

2.- Mecánica de los líquidos:

a) Hidrostática

b) Hidrodinámica

3.- Mecánica de los gases:

a) Neumostática

b) Neumodinámica

A. CINEMÁTICA

Es el estudio del movimiento de los sólidos, independientemente de las causas que lo originan.

CONCEPTOS

MOVIMIENTO

Acción o efecto del desplazamiento de un cuerpo en un lapso de tiempo con respeto a otro que se supone fijo.

TRAYECTORIA

Es la línea geométrica descrita por las distintas posiciones que va ocupando un punto o cuerpo, que se mueve en un lapso de tiempo.

Según la trayectoria del movimiento puede ser:

a) Rectilíneo b) Curvilíneo

c) Circuferencial d) Parabólico

CLASES DE MOVIMIENTO

a) Uniforme b) Variado

c) Uniformemente variado

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U.)

$$V = \frac{e}{t}$$

Unidades SI: $\frac{m}{s}$

Donde:

V = velocidad o rapidez.

e = distancia recorrida en el timpo "t".

t = tiempo que dura el movimiento.

MOVIMIENTO VARIADO

Cuando su velocidad o rapidez varía desordenadamente.

VELOCIDAD O RAPIDEZ MEDIA

Es un promedio de las rapideses de un móvil.

$$V_m = \frac{e_t}{t_T}$$

o:

$$V_m = \frac{e_1 + e_2 + \ldots}{t_1 + t_2 + \ldots}$$

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (M.R.U.V.)

$$\Delta V = V_f - V_i$$

ΔV = variación de la rapidez o velocidad.

V_f = velocidad o rapidez final.

V_i = velocidad o rapidez inicial.

ACELERACIÓN

$$a = \frac{\Delta V}{t}$$

o:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

Unidades SI: $\frac{m}{s^2}$

RAPIDEZ FINAL CON VELOCIDAD INICIAL

$$V_f = V_i + a \cdot t$$

Unidades: $V = \frac{m}{s}$; $a = \frac{m}{s^2}$; $t = s$

ESPACIO "e" RECORRIDO CON ACELERACIÓN Y VELOCIDAD INICIAL

$$e = V_i \cdot t \pm \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

cuando $V_i = 0$: $e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

VELOCIDAD FINAL "V_f" EN FUNCIÓN DE V_i, a, e

$$V_f^2 = V_i^2 \pm 2 \cdot a \cdot e$$

MOVIMIENTO VERTICAL

Es el movimiento de un cuerpo que sigue la direccion radial de la Tierra. El movimiento es uniformemente variado, la aceleración es la aceleración de la gravedad ($g = 9{,}8\ m/s^2$). Cuando el movimiento es "hacia arriba", la aceleración "g" es negativa, cuando el movimiento es "hacia abajo", la aceleración "g" es positiva.

$$h = V_i \cdot t \pm gt^2$$

$$V_f = V_i \pm gt$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2gh$$

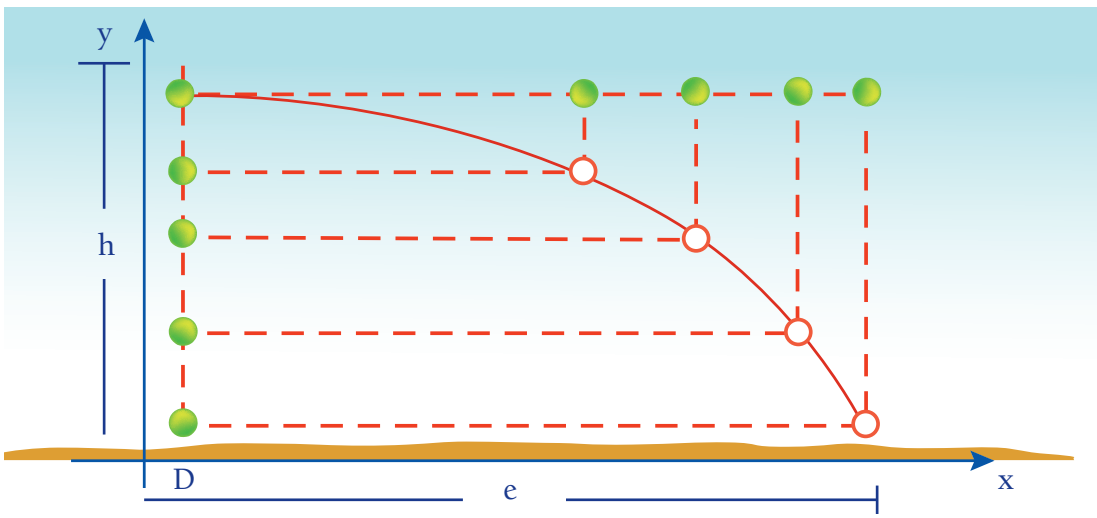
Donde:

h: altura de subida o de caída

g: aceleración de la gravedad ($9{,}8\ m/s^2$ o 32 pies/s^2). De subida (-), de bajada (+).

MOVIMIENTO COMPUESTO

Es aquel en el cual existen simultáneamente 2 o más tipos de movimiento. Por ejemplo: movimiento horizontal y vertical a la vez.



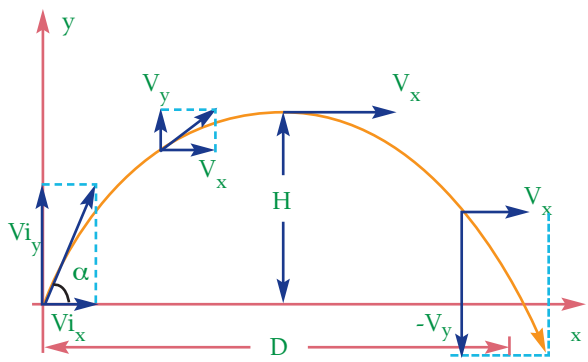
PRINCIPIO DE LA INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS (Principios de Galileo)

"Si un cuerpo tiene movimiento compuesto, cada uno de los movimientos se cumple como si los demás no existieran".

MOVIMIENTO PARABÓLICO (Introducción a la balística)

El movimiento de un proyectil en el vacío resulta de la composición de un movimiento horizontal rectilíneo y uniforme, y un movimiento vertical uniformemente variado por la acción de la aceleración de la gravedad.

CARACTERÍSTISTICAS DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO



a) Forma de la trayectoria: "parabola".

b) Velocidad del movimiento horizontal V_x: CONSTANTE

$$V_x = V_i \cdot \cos \alpha$$

c) Velocidad vertical V_y: UNIFORMEMENTE VARIADA

1) Rapidez vertical inicial:

$$V_{i\,y} = V_i \cdot \text{sen}\, \alpha$$

2) Rapidez vertical en un punto cualquiera de la trayectoria, de acuerdo al tiempo.

$$V_y = V_i \,\text{sen}\, \alpha \mp g \cdot t$$

d) Tiempo "t" de vuelo cuando "H" decrece hasta cero.

$$H = V_i \cdot \text{sen}\, \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Entonces, cuando H = 0:

$$t = \frac{2V_i \cdot \text{sen}\, \alpha}{g}$$

e) Tiempo para alcanzar su máxima altura "H".

La altura es máxima cuando $V_y = 0$

$$\Rightarrow V_y = V_i \cdot \text{sen}\, \alpha - gt$$

de donde y considerando $V_y = 0$

$$t = \frac{V_i \cdot \text{sen}\, \alpha}{g}$$

f) Alcance vertical "H":

$$H = \frac{V_i^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{2g}$$

El alcance vertical es máximo cuando $\alpha = 90º$

g) Alcance horizontal "D"

$$H = \frac{V_i^2 \cdot \text{sen}2\, \alpha}{2g}$$

El alcance horizontal es máximo cuando $\alpha = 45º$

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORME (M.C.U.)

Es aquel en el cúal la trayectoria es una circunferencia; barre arcos y barre ángulos iguales en tiempos iguales.

PERÍODO

Es el tiempo "t" que tarda un móvil en dar una vuelta a una revolución a la circunferencia.

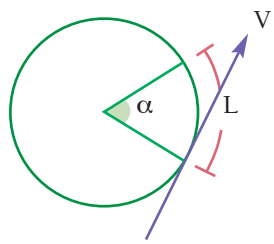
Velocidad lineal "V":

$$V = \frac{\text{arco "L"}}{t}$$

Velocidad angular "ω"

$$\omega = \frac{\text{ángulo "}\alpha\text{"}}{t}$$

Unidades SI: $\frac{rad}{s}$



VELOCIDAD O RAPIDEZ ANGULAR Y PERÍODO

Siendo "T" el período o tiempo empleado por un móvil en dar una vuelta(2π radianes), la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA VELOCIDAD TANGENCIAL

$$V = \omega \cdot R$$

FRECUENCIA "f"

Es la inversa del periodo "t".

$$f = \frac{1}{T}$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA, RELACIÓN CON LA VELOCIDAD TANGENCIAL Y LA VELOCIDAD ANGULAR

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a_c = \omega^2 \cdot R$$

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORMEMENTE VARIADO(M.C.U.V.)

Es el movimiento circunferencial que tiene aceleración. Su rapidez varía con el tiempo.

ACELERACIÓN ANGULAR "γ"

$$\gamma = \frac{\Delta w}{t}$$

$$\gamma = \frac{\omega_f - \omega_1}{t}$$

Unidades SI: $\frac{rad}{s^2}$

RELACIONES DE VELOCIDAD O RAPIDEZ FINAL, ÁNGULO RECORRIDO

$$\omega_f = \omega_1 + \gamma\, t$$

$$\alpha = \omega_1 \cdot t \pm \frac{1}{2}\gamma\, t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_1^2 \pm 2\gamma\, \alpha$$

B. ESTÁTICA

Estudia las condiciones que debe cumplirse para que un cuerpo indeformable, sobre el que actúan fuerzas y/o cuplas, se mantenga en equilibrio; es decir para que las fuerzas o cuplas se anulen entre sí.

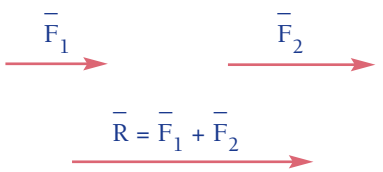
FUERZA

Es una magnitud vectorial que modifica la situación de los cuerpos, variando su estado de reposo o movimiento, variando la velocidad de los cuerpos, aumentando, disminuyendo o variando su dirección. TODA FUERZA APARECE COMO RESULTADO DE LA INTERACCIÓN DE LOS CUERPOS.

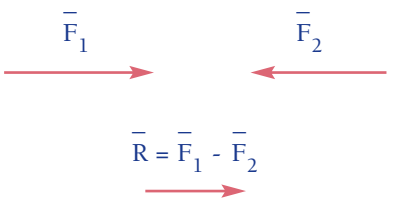
RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS

También se llama composición de fuerzas. Hay varios casos:

1) CUANDO ESTAN EN UN MISMA LINEA DE ACCIÓN y tienen el mismo sentido, la resultante es la diferencia de las fuerzas.



2) CUANDO ESTAN EN UNA MISMA LINEA DE ACCION y tienen sentido contrarios, la resultante es la diferencia de las fuerzas.



3) CUANDO FORMAN CUPLA con respecto a un mismo eje. ***Cupla*** es una par de fuerzas paralelas de igual módulo pero de sentidos opuestos.

La resultante tiene las siguientes características:

a) Su eje de rotación es el mismo que el de los componentes.

b) Su sentido, es el de la cupla mayor.

c) Su medida, la diferencia de las cuplas.

d) Su punto de aplicación es cualquiera, es un vector libre.

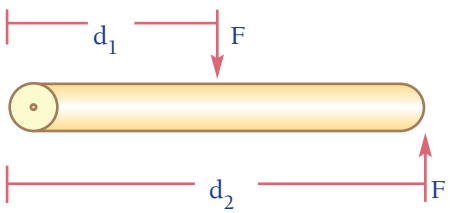
El equilibrio se consigue aplicando una cupla igual y de sentido contrario.

$$\vec{R} = \vec{F}_2 \cdot d_2 - \vec{F}_1 \cdot d_1$$

como $F_1 = F_2 = F$, entonces:

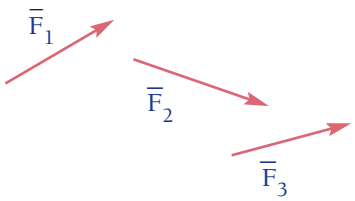
$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}\,(d_2 - d_1)}$$

Unidades SI: N . m

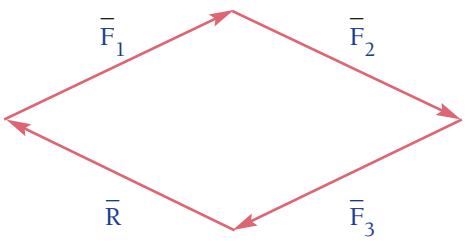


4) CUANDO LAS FUERZAS SON CONCURRENTES, las resultantes se halla por el "polígono de fuerzas", por el "paralelogramo", o por el "sistema de ejes cartesianos".

Ejemplo: Hallar la resultante de las fuerzas de la figura:

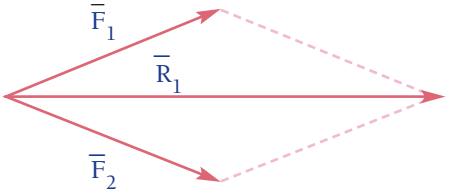


a) Por el método del polígono de fuerzas:

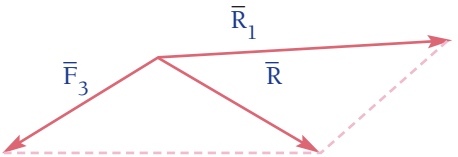


b) Método del Paralelogramo.

(Paso 1)



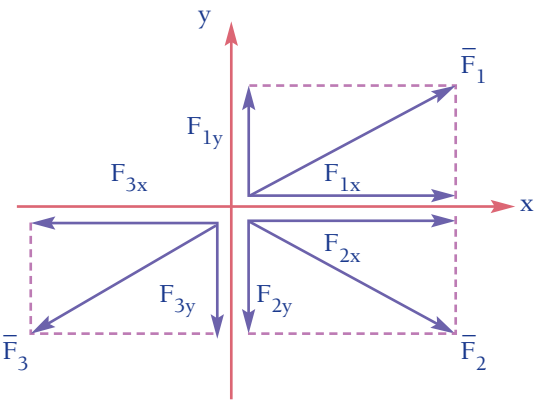
(Paso 2)



$$\bar{R}_1 = \sqrt{\bar{F}_1^2 + \bar{F}_2^2 + 2\,\bar{F}_1\,\bar{F}_2 \cos\alpha}$$

$$\boxed{\bar{R}_1 = \sqrt{\bar{R}_1^2 + \bar{F}_3^2 + 2\,\bar{R}_1\,\bar{F}_3 \cos\beta}}$$

c) Método del sistema de ejes coordenados:

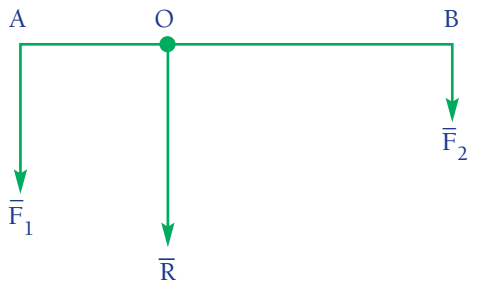


1) $\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x}$

2) $\Sigma F_y = F_{1y} - F_{2y} - F_{3y}$

$$\boxed{\bar{R} = \sqrt{\left(\Sigma \bar{F}_x\right)^2 + \left(\Sigma \bar{F}_y\right)^2}}$$

5) CUANDO SON PARALELAS Y DEL MISMO SENTIDO, las características del a resultante son:



Su recta de acción es paralela a las fuerzas.

Su sentido, el sentido de las fuerzas.

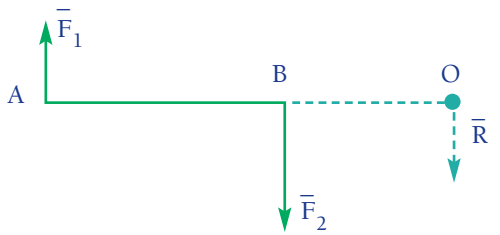
Su medida, la suma.

Su punto de aplicación está situado en un punto que divide a la barra que une las fuerzas en segmentos inversamente proporcionales a las fuerzas (Relación de Stevin).

Sea O el punto de aplicación de la resultante, entonces:

$$\frac{F_1}{BO} = \frac{F_2}{AO} = \frac{R}{AB}$$

6) CUANDO SON PARALELAS Y DE SENTIDO CONTRARIO, las características de la resultante son:



Su recta de acción paralela a las fuerzas.

Su sentido es el de la fuerza mayor.

Su medida, la diferencia.

Su punto de aplicación está situado en un punto que divide a la barra que une las fuerzas en segmentos inversamente proporcionales a las fuerzas (Relación de Stevin).

Sea O el punto de aplicación de la resultante, entonces:

$$\frac{F_1}{BO} = \frac{F_2}{AO} = \frac{R}{AB}$$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO EN UN CUERPO

- **PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO O EQUILIBRIO DE TRASLACIÓN**

Cuando un cuerpo está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre él debe ser igual a cero.

$$\Sigma F = 0$$

Cuando la fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares se debe tener que:

$$\Sigma F_x = 0$$

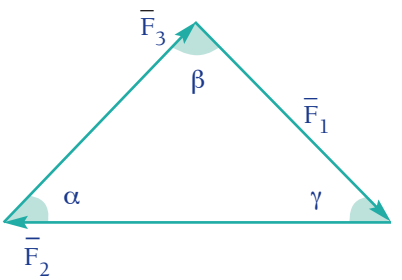
$$\Sigma F_y = 0$$

NOTA IMPORTANTE

Un cuerpo está en reposo cuando soporta las acciones de tres fuerzas concurrentes que se anulan.

TEOREMA DE LAMY
O LEY DE LOS SENOS

"En un triángulo funicular. los lados que representan las fuerzas son proporcionaleas a los senos de los ángulos opuestos".



$$\frac{F_1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{F_2}{\text{sen}\ \beta} = \frac{F_3}{\text{sen}\ \gamma}$$

MOMENTO DE FUERZA

Con respecto a un punto O con respecto a un eje, se calcula así:

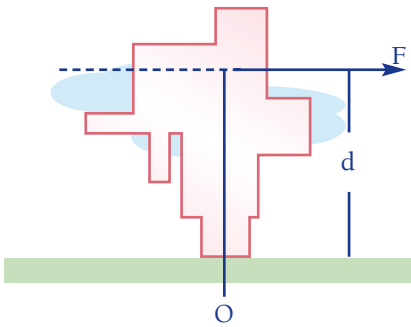
$$M_o = F \cdot d$$

Unidades SI: n . m

O: punto de giro(o apoyo)

F: fuerza

d: distancia del punto de giro a la fuerza



- **SEGUNDA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO O EQUILIBRIO DE ROTACIÓN**

Cuando un cuerpo permanece en reposo o, cuando rota con velocidad uniforme, la suma de todos los momentos debe ser cero:

$$\Sigma M = 0$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (D.C.L.) O DIAGRAMA LIBRE

Es un gráfico donde se indica TODAS LAS FUERZAS que se actúan sobre el cuerpo. Precisamente, las características del D.C.L. es que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo concurren a un punto común.

Ejemplo: Sea el sistema:

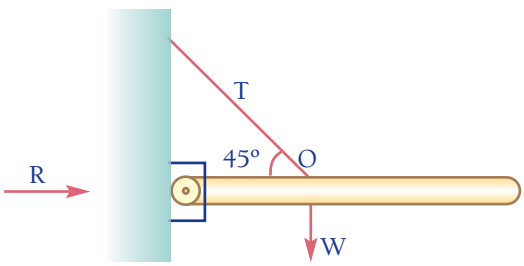
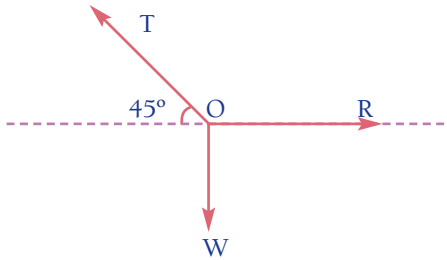


Diagrama del cuerpo libre:



Donde:

T = tensión del cable que "soporta" la barra.

R = reacción de la pared "sobre" la barra.

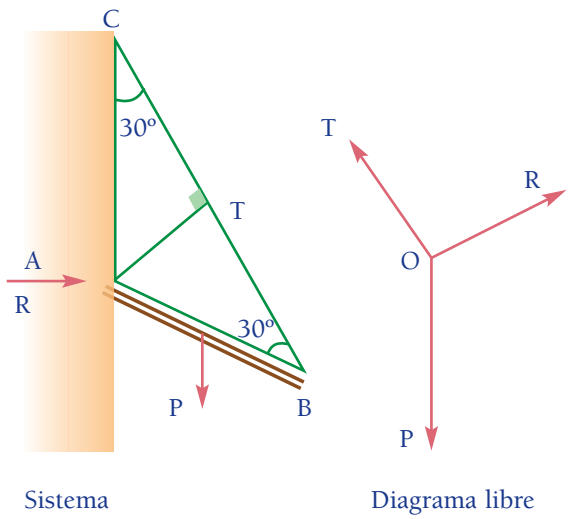
W = peso de la barra,"atracción" que la Tierra ejerce sobre la barra.

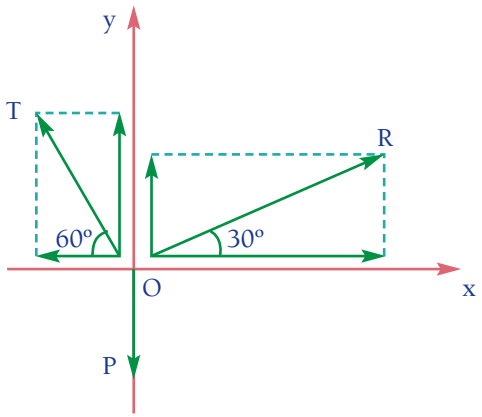
O= punto de concurrencia de las fuerzas.

DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN SUS COMPONENTES RECTANGULARES

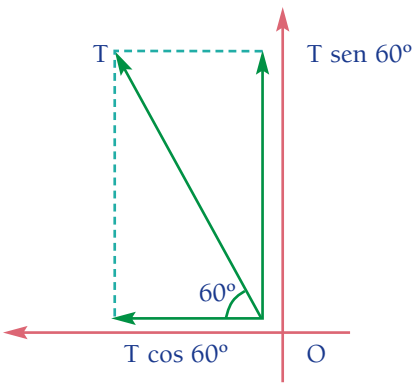
El procedimiento indica que las fuerzas de un sistema en equilibrio se grafique en un DIAGRAMA de CUERPO LIBRE. El punto de concurrencia de estas fuerzas se hace coincidir con el punto de intersección de un Sistema de ejes rectangulares. Cada una de las fuerzas se proyecta sobre los ejes "x" e "y" del sistema rectangular, hallando las componentes de las fuerzas sobre los ejes "x" e "y".

Ejemplo:

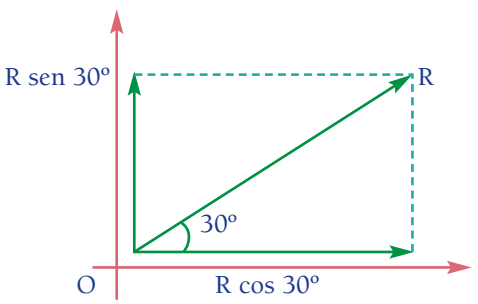




Descomposición sobre los ejes x e y



Descomposición de T



Descomposición de R

MÁQUINAS SIMPLES

Una máquina simple es un mecanismo o conjunto de mecanismos que mediante fuerzas mecánicas, transforma un trabajo motor en trabajo útil.

Hay dos tipos: máquinas simple tipo palanca y máquinas simples tipo plano inclinado.

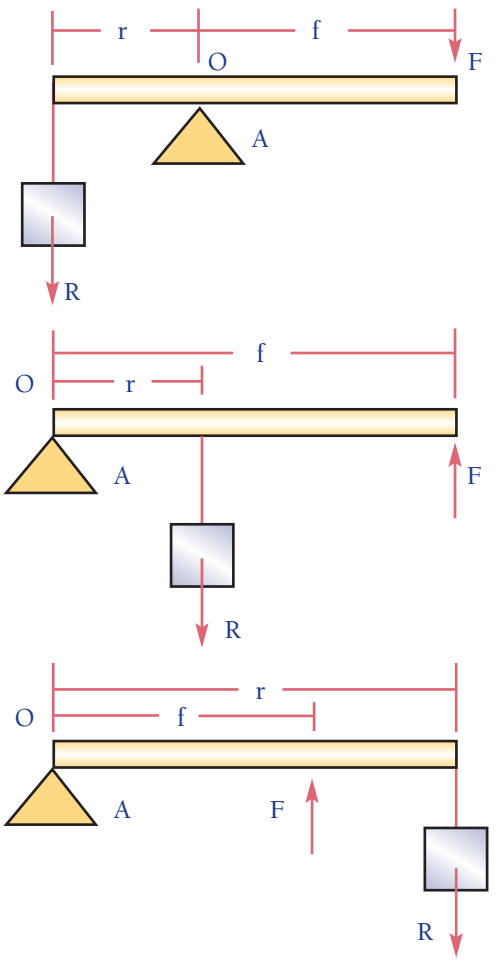
Tipo palanca	Palanca Poleas Tornos
Tipo plano inclinado	Plano inclinado Cuña Tornillo

A) TIPO PALANCA

PALANCA

Es una barra rígida sometida a dos esfuerzos (Resistencia "R" y fuerza "F") y apoyada en un punto.

Según la posición de la resistencia "R", fuerza "F" y punto de apoyo "A", puede ser: inter-apoyantes, inter-resistentes e interpotentes.



Donde:

R = resistencia

A = apoyo

F = fuerza de acción

CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LA PALANCA

$\Sigma M_o = 0$ que es lo misom que:

$$R \cdot r = F \cdot f$$

Donde:

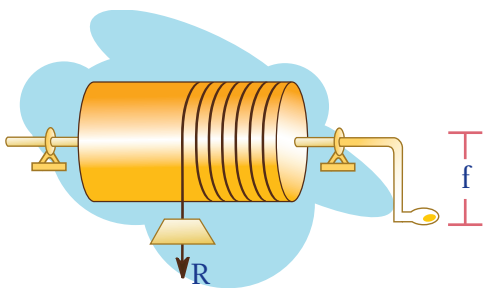
r = brazo de resistencia

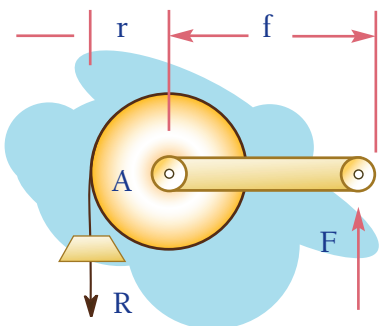
f = brazo de fuerza

TORNO O CABRESTANTE

Es una palanca inter-apoyante.

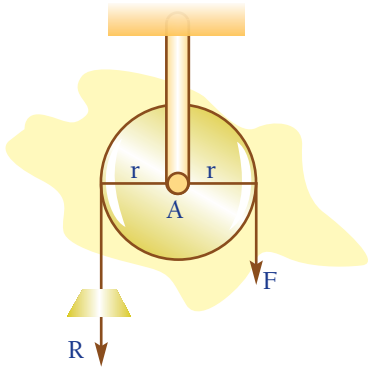
$$R \cdot r = F \cdot f$$





POLEA FIJA

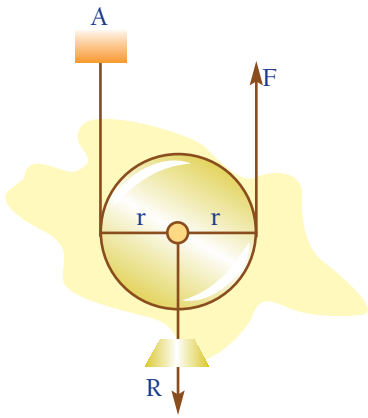
Es una palanca inter-apoyante. No ahorra fuerza.



$$R = F$$

POLEA MÓVIL

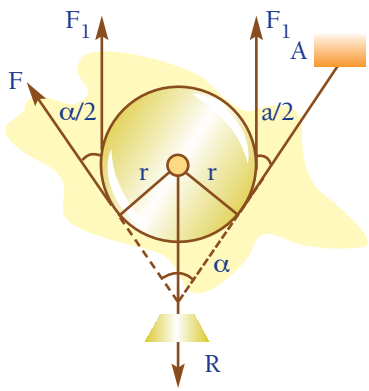
Es una palanca inter-resistente.



$$F = \frac{R}{2}$$

POLEA MÓVIL DE FUERZAS NO PARALELAS

Es una palanca inter-resistente.



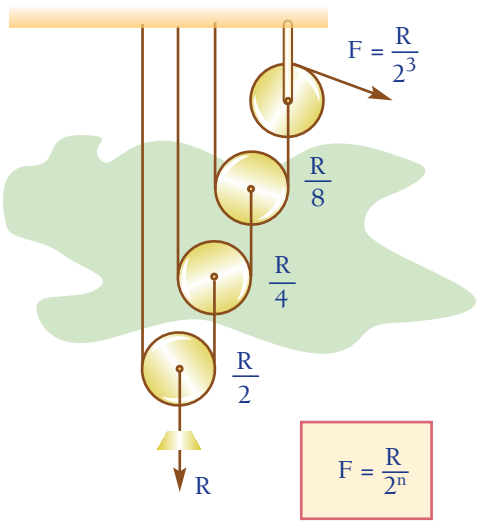
$$F = \frac{R}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

POLIPASTO

Son de tres clases: Aparejo potencial o trocla, aparejo factorial o motón y aparejo diferencial o tecle.

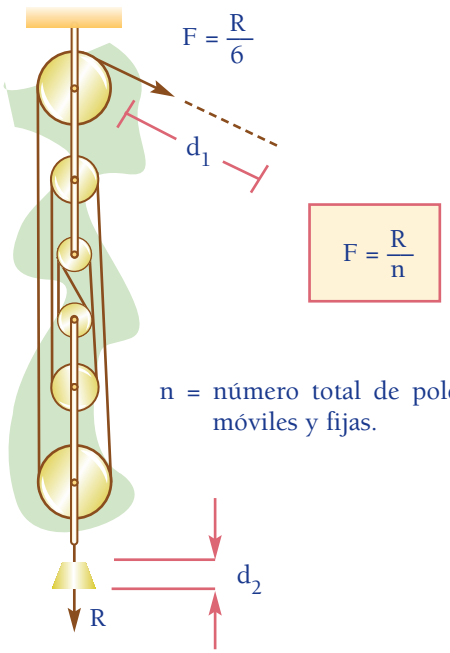
a) APAREJO POTENCIAL O TROCLA

Es un conjunto de poleas móviles con una fija.



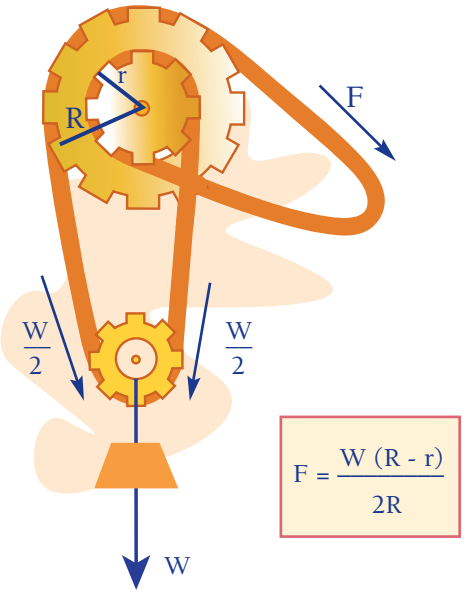
b) APAREJO FACTORIAL O MOTÓN

Es un conjunto de poleas móviles y un conjunto de poleas fijas.



c) APAREJO DIFERENCIAL O TECLE

Consta de una polea con 2 diámetros distintos y con periferias dentadas y una polea fija también con perímetro dentado, la cual lleva la carga.

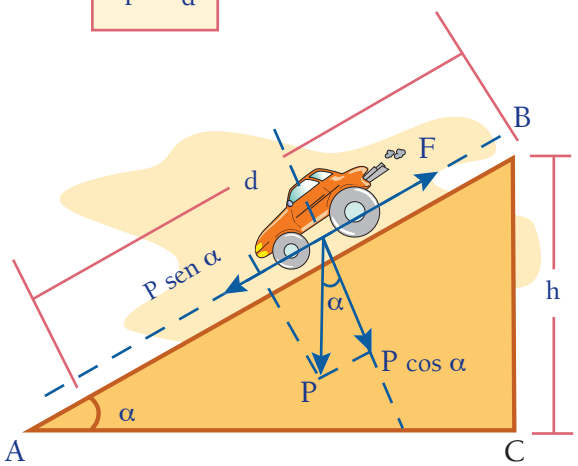


B) TIPO PLANO INCLINADO:

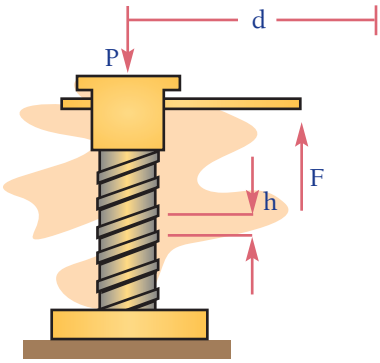
1. PLANO INCLINADO

Como su nombre lo indica es un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal.

$$\frac{F}{P} = \frac{h}{d}$$



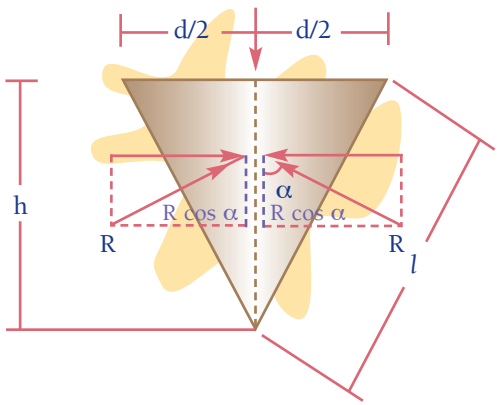
2.- TORNILLO, GATO O CRIC



$$\frac{F}{P} = \frac{h}{2\pi d}$$

3.- CUÑA

Es una pieza mécanica que puede tener la forma de un cono o una cuña propiamente dicha.



$$F = \frac{2Rd}{\sqrt{d^2 + 4h^2}}$$

VENTAJA Y RENDIMIENTO MECÁNICO

a) Ventaja mecánica actual o real "V_A"

$$V_A = \frac{W}{F}$$

W = peso o resistencia que vencer

F = fuerza real empleada para vencer "W"

b) Ventaja mecánica ideal "V_i"

$$V_i = \frac{f}{r}$$

f = desplazamiento de la máquina en vacio.

r = desplazamiento de la máquina en carga.

c) Rendimiento mecánico.-

$$Re = \frac{Tu}{Tm}$$

$$Re = \frac{V_A}{V_i}$$

Tu = trabajo útil realizado por la máquina.

Tm = trabajo motor o trabajo recibido por la máquina.

C) DINÁMICA

Parte de la mecánica que trata de las leyes del movimiento en relación con las fuerzas que lo producen. Se divide en Hidrodinámica, que se ocupa de la mecánica de los liquidos, Aerodinámica o dinámica de los gases y Dinámica de los puntos o de los cuerpos rígidos.

PRINCIPALES CONCEPTOS

FUERZA

Es un concepto matemático, que se puede definir como todo aquello que modifica el estado de movimiento de un cuerpo. TODA FUERZA APARECE COMO RESULTADO DE LA INTERACCIÓN DE LOS CUERPOS.

MASA

Es la cantidad de materia que hay en un cuerpo. Un concepto más cabal: masa es la medida de la inercia de un cuerpo, a mayor masa mayor inercia.

PESO

Es la "fuerza" que hace la Tierra para atraer la masa de un cuerpo hacia su centro.

RELACIÓN ENTRE PESO Y MASA

$$m = \frac{P}{g}$$

Unidades SI: $\frac{N}{m/s^2} = kg$

m = masa, en kg

P = peso de la masa "m", en N

g = aceleración de la gravedad terrestre; en m/s^2

La unidad de masa del SI es el KILOGRAMO "kg":

$$kg = \frac{N}{\frac{m}{s^2}} \quad \Rightarrow \quad N = kg \cdot \frac{m}{S^2}$$

∴ 1 KILOGRAMO "kg".- Es la masa que hay en 1 dm^3 de agua pura a 4 ºC.

SEGUNDA LEY DE NEWTON

La aceleración que adquiere un cuerpo de masa "m", bajo la acción de una fuerza "F", es directamente proporcional a la fuerza "F" e inversamente proporcional a la masa "m".

$$a = \frac{F}{m}$$

UNIDADES DE FUERZA

1 NEWTON:(unidad de fuerza del SI):

Es la fuerza que se aplica a 1 kg para provocarle la aceleración de $1m/s^2$.

$$1N = 1kg \cdot \frac{m}{S^2}$$

1 DINA:

Es la fuerza que se aplica a 1 g para provocarle la aceleración de 1 cm/s^2.

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ g} \cdot \frac{cm}{S^2}$$

1 POUNDAL:

Es la fuerza que se aplica a 1 lib-masa para provocarle la aceleración de $1pie/s^2$.

$$1 \text{ Poundal} = 1 \text{ lib - m} \cdot \frac{pie}{s^2}$$

1 LIBRA- FUERZA:

Es la fuerza que se aplica a 1 slug para provocarle la aceleración del pie/s^2.

$$1lib - f = 1 \text{ slug} \cdot \frac{pie}{s^2}$$

1 slug = 32,2 lib - masa

RESUMEN

El sistema oficial es SI, los demás son sólo referenciales:

SISTEMA	MASA	FUERZA
SI	kg	$N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$
aceptadas por SI	g	$dina = g \cdot \frac{cm}{s^2}$
F.P.S.	lib-m	$poundal = lib\text{-}m \cdot \frac{pie}{s^2}$
Tec. Inglés	slug	$lib\text{-}f = slug \cdot \frac{pie}{s^2}$

EQUIVALENCIAS DE UNIDADES DE MEDIDA DE MASA Y FUERZA

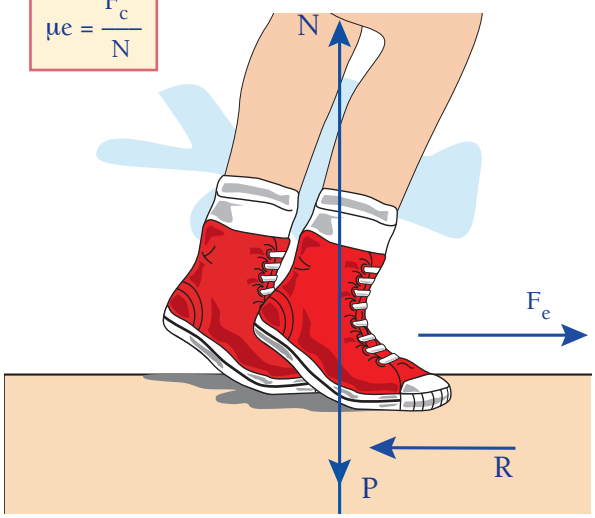
1 kg = 1 000 g	$1N = 10^5$ dinas
1 slug = 32,2 lib-m	1N = 0,224 lib-f 1 lib-f = 32,2 poundal

ROZAMIENTO, FUERZA DE ROZAMIENTO O FRICCIÓN

Es una fuerza tangencial que está presente entre dos superficies en contacto y que se opone al movimiento relativo (desplazamiento) de uno con respecto al otro. Puede ser rozamiento estático o cinético.

$$\mu e = \frac{F_e}{N} \quad \text{o} \quad \mu e = \frac{R}{N}$$

$$\mu e = \frac{F_c}{N}$$



μ_e = coeficiente de rozamiento estático (cuando están en reposo).

μ_c = coeficiente de rozamiento cinético (cuando están en movimiento).

F_e = R = fuerza mínima para romper el estado de reposo.

F_c = Fuerza necesaria para mantener un cuerpo en movimiento.

N = fuerza perpendicular al plano de apoyo de un cuerpo.

P = peso de un cuerpo, el vector que lo representa siempre está dirigido al centro de la Tierra. (Es vertical).

NOTA: Con freceuncia se usa μ por μ_e

DINÁMICA DE LA ROTACIÓN O ROTACIÓN DINÁMICA

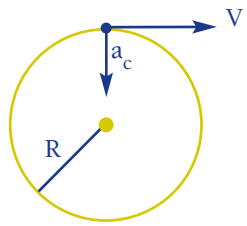
Es el estudio de la rotación o giro de una masa material "m" alrededor de un punto.

DINÁMICA CIRCUNFERENCIAL

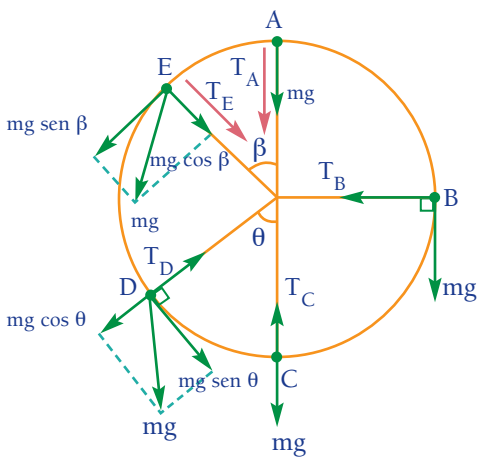
Un cuerpo en rotación siempre tiene una aceleración centrípeta "a_c". La fuerza centrípeta "F_c" ocasiona la presencia de la aceleración centrípeta.

La fuerza centrípeta nunca es una fuerza independiente aplicada a un cuerpo, es la resultante de todas la fuerzas radiales aplicadas al cuerpo.

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$



La TENSIÓN de una cuerda que sirve de radio de giro en un movimiento circuferencial de un plano, varía con la posición del cuerpo que gira. Así:



En A : $T_A = F_c - m \cdot g$

En B : $T_B = F_c$

En C : $T_C = F_c + m \cdot g$

En D : $T_D = F_c + m \cdot g \cdot \cos\theta$

En E : $T_E = F_c - m \cdot g \cdot \cos\beta$

Donde:

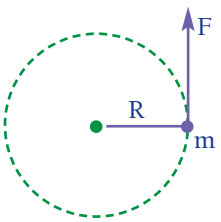
$$F_c = F_{RAD} - m \cdot a_c = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

m = masa que rota, en kg

γ = aceleración angular, en s^{-2}

R = radio rotación, en m

MOMENTO DINÁMICO DE ROTACIÓN: "M"



$$M = m \cdot \gamma \cdot R^2 \quad (I)$$

MOMENTO DE INERCIA: "I"

Es la resistencia que ofrece a la rotación de un cuerpo.

$$I = m \cdot R^2 \quad (II)$$

Comparando (I) con (II):

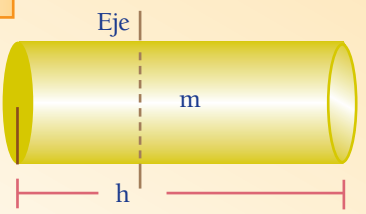
$$M = \gamma \cdot I$$

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS SOLIDOS

$$I = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

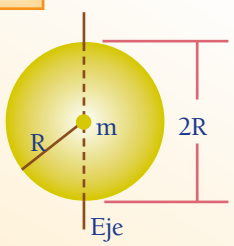
Cilindro macizo con respecto a su eje.

$$I = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot h^2}{12}$$



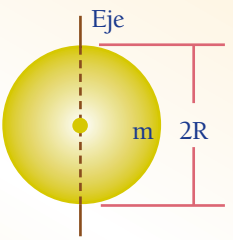
Cilindro macizo cos respecto a un diámetro central.

$$I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$$



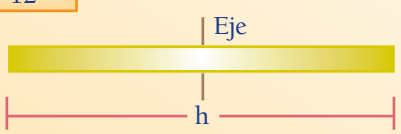
Esfera maciza con respecto a un diámetro cualquiera (eje).

$$I = \frac{2}{3} m \cdot R^2$$



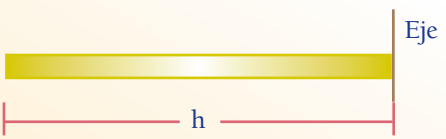
Cascarón esférico muy delgado con respecto a un diámetro cualquiera (eje).

$$I = \frac{m \cdot h^2}{12}$$



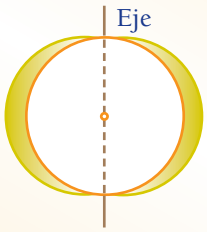
Varilla delgada respecto a un eje que pasa por el centro y perpendicular a la longitud.

$$I = \frac{m \cdot h^2}{3}$$



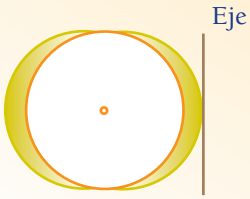
Varilla delgada respecto a un eje que pasa por un extremo perpendicular a la longitiud.

$$I = \frac{m \cdot R^2}{2}$$



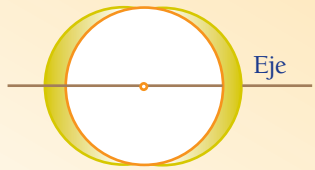
Aro con respecto a cualquier diámetro (eje).

$$I = \frac{3}{2} m \cdot R^2$$



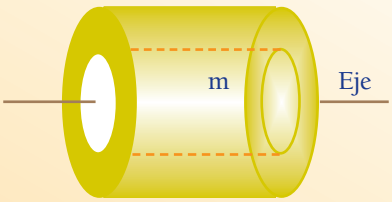
Aro con respecto a cualquier línea tangente (eje).

$$I = m \cdot R^2$$



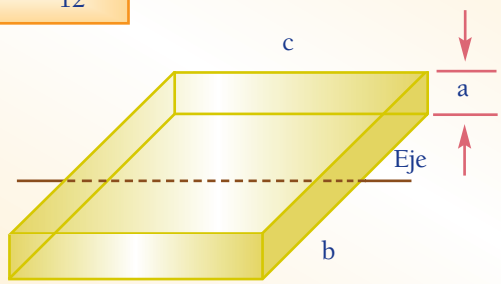
Aro con respecto a su eje

$$I = \frac{m}{2} (R^2 + r^2)$$



Cilindro anular (o anillo) con respecto al eje del cilindro.

$$I = m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12}$$



Paralelepípedo con respecto al eje central.

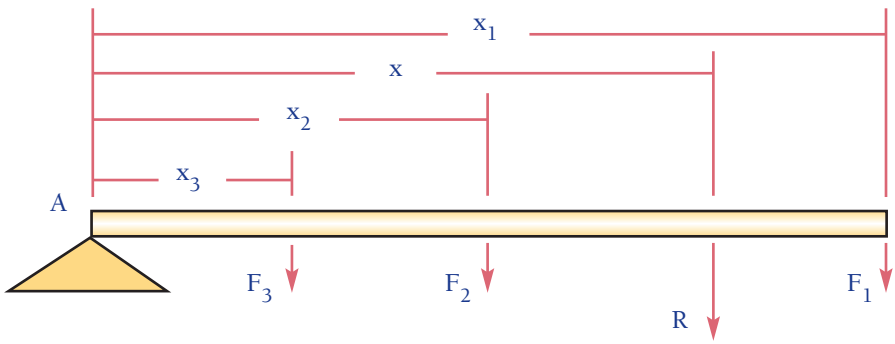
CENTRO DE GRAVEDAD

Es el punto donde se supone está concentrado todo el peso de un cuerpo.

TEOREMA DE VARIGNON

"En cualquier sistema de fuerzas se cumple que, la **suma de todos los momentos** producidos por las fuerzas componentes, **con respecto a un punto**, es igual al momento producido por la fuerza resultante con respecto al mismo punto".

Tomando momentos con respecto al punto "A":



Expresión que sirve para calcular el punto de aplicación de las resultantes.

$$F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 = Rx$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3}{R}}$$

POSICIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD

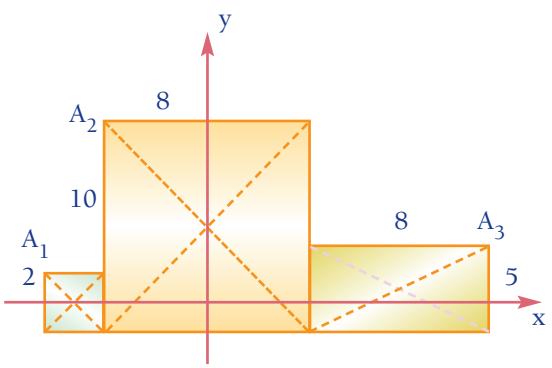
Se determina con respecto a un sistema de ejes coordenados (x_g,y_g) mediante la relación: C.G. (x, y)

$$\boxed{x_g = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots}}$$

$$\boxed{y_g = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots}}$$

Ejemplo:

Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura:



Los pesos o fuerzas "F" son perpendiculares a las áreas "A":

$A_1 = 2 \cdot 2 = 4 \quad ; \; x_1 = -5 \; , \; y_1 = 0$

$A_2 = 10 \cdot 8 = 80 \quad ; \; x_2 = 0 \; , \; y_2 = 4$

$A_3 = 8 \cdot 5 = 40 \quad ; \; x_3 = 8 \; , \; y_3 = 1{,}5$

$$x_g = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_g = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$\therefore \quad x_g = \frac{4(-5) + 80 \cdot 0 + 40 \cdot 8}{4 + 80 + 40} = 2{,}42$$

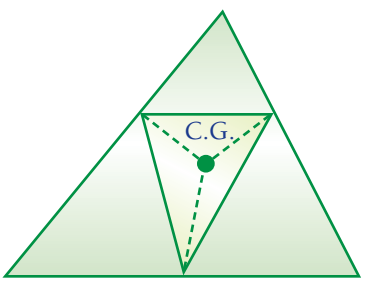
$$y_g = \frac{4 \cdot 0 + 80 \cdot 4 + 40 \cdot 1{,}5}{4 + 80 + 40} = 3{,}06$$

CENTROS DE GRAVEDAD DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

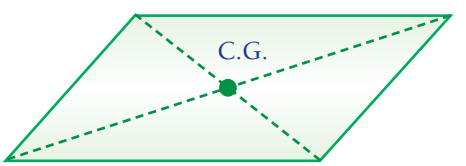
DE PERÍMETROS:

De una línea: es el punto medio.

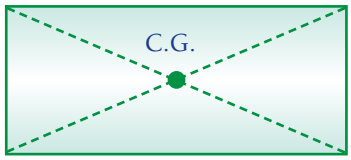
Del perímetro de un triángulo: es la intersección de las bisectrices del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados.



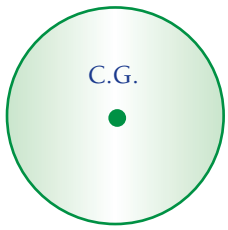
De un paralelogramo: es la intersección de las diagonales.



De un rectángulo: es la intersección de las diagonales.

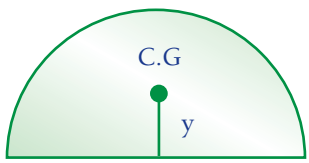


De una circunferencia: es su centro.



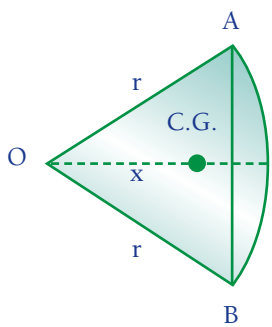
De una semicircunferencia: está a $2r/\pi$ de la base.

$$y = \frac{2r}{\pi}$$



De un arco de circunferencia:

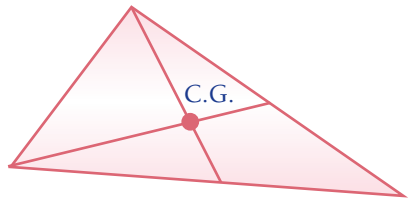
está a $r \cdot \frac{\text{cuerda}}{\text{arco}}$; del centro.



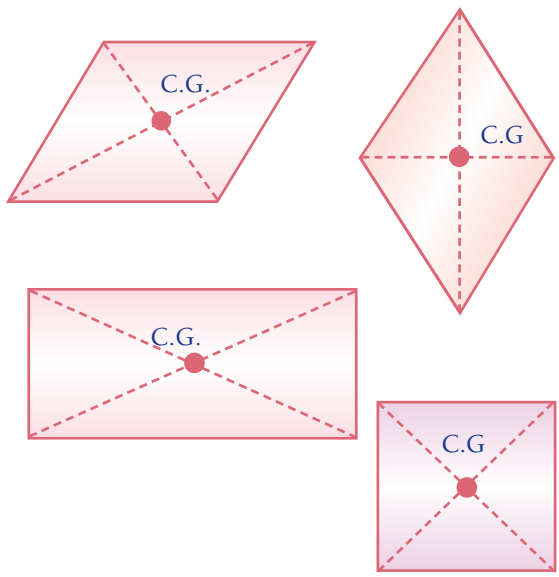
$$x = \frac{\text{AB (cuerda)}}{\text{AB (arco)}}$$

DE ÁREAS:

De un triángulo: es la intersección de las medianas, a 1/3 de la base.



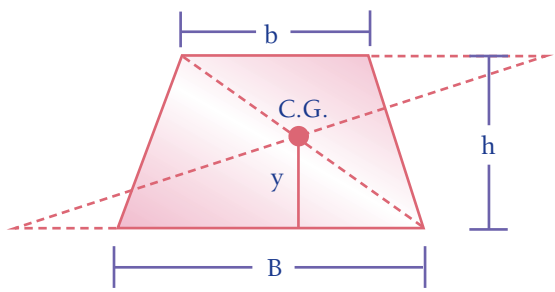
De un paralelogramo: rombo, rectángulo y cuadrado, es la intersección de las diagonales.



Trapecio:

$$y = \frac{B + 2b}{B + b} \cdot \frac{h}{3}$$

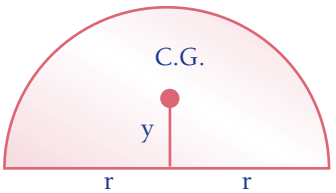
De la base mayor.



De un semicírculo:

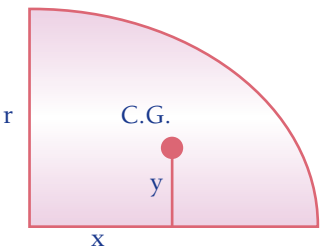
$$y = \frac{4r}{3\pi}$$

De la base



De un cuadrante de círculo:

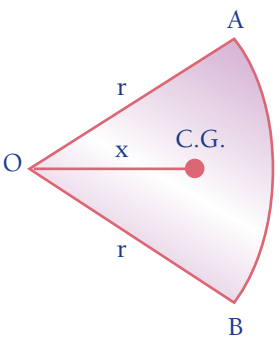
$$x = y = \frac{4r}{3\pi}$$



De un sector circular:

$$x = \frac{2 \text{ cuerda AB}}{3 \text{ arco AB}} \cdot r$$

Del centro

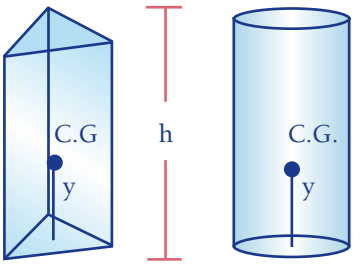


DE VOLUMENES:

De un prisma o cilindro, en eje:

$$y = \frac{h}{2}$$

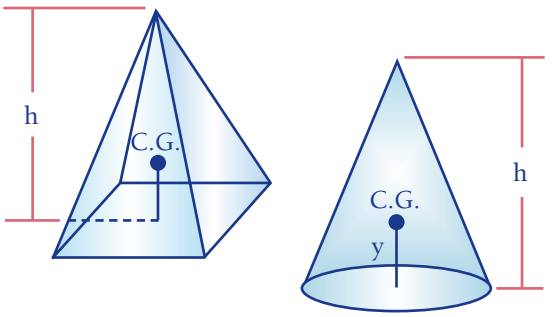
De la base



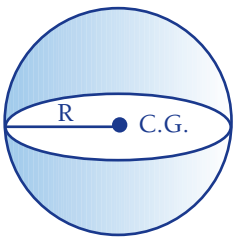
Pirámide o cono, en el eje:

$$y = \frac{h}{4}$$

De la base



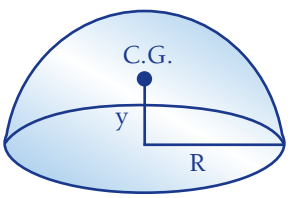
De una esfera, es el centro de la figura.



De una semiesfera:

$$y = \frac{3R}{8}$$

De la base.



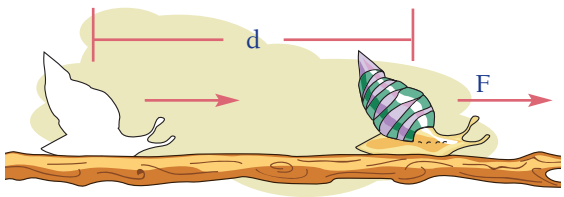
TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

A) TRABAJO

Es lo realizado por una fuerza, aplicada sobre una masa, cuando la desplaza una distancia. El trabajo es una magnitud escalar.

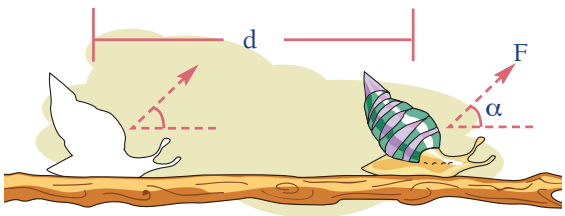
$$T = F \cdot d$$

Unidades SI: N.m.



En general:

$$T = f \cdot d \cdot \cos \alpha$$



UNIDADES DE TRABAJO

La unidad SI de trabajo es el JOULE "J". Un submúltiplo es el ERGIO "erg".

1 JOULE (Unidad SI)

Es el trabajo realizado por la fuerza de 1 newton que, aplicado sobre un cuerpo lo desplaza una distancia de 1 m.

$$1\ J = 1\ N \cdot 1\ m$$

1 ERGIO "erg" (No es unidad SI)

Es el trabajo realizado por la fuerza de 1 dina, que aplicada a un cuerpo lo desplaza una distancia de 1 cm.

$$1\ erg = 1\ dina \cdot 1\ cm$$

EQUIVALENCIAS DE UNIDADES DE TRABAJO

$$1\ J = 10^7\ erg$$

B) POTENCIA

Es el trabajo realizado en un tiempo determinado:

$$P = \frac{T}{t}$$

Donde:

P = potencia media.

T = trabajo realizado por una fuerza, en J.

t = intervalo de tiempo empleado, en s.

UNIDADES DE POTENCIA

La unidad de potencia es el watt "W"

1 WATT "W"

Es el trabajo realizado por 1 joulio en 1 segundo.

$$1\ W = \frac{1\ J}{1\ s}$$

$$1kW \cdot h = 3{,}6 \cdot 10^6\ J$$

1 H.P. (Horse Power)

Es el trabajo realizaco por 735 N.m en 1 segundo.

$$1\ H.P. = \frac{735\ N \cdot m}{s}$$

o:

$$1\ H.P. = \frac{735\ J}{s}$$

C) ENERGÍA

Es la capacidad que tiene todo cuerpo para realizar un trabajo. Puede ser: Energía Potencial y Energía Cinética.

ENERGÍA POTENCIAL (Ep)

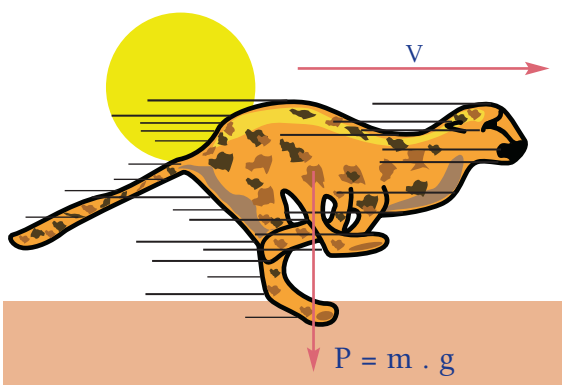
Es la capacidad almacenda para realizar un trabajo que tiene un cuerpo en reposo, en virtud a su peso y a su altura, con respecto a un nivel de referencia.

$$Ep = P \cdot h$$

ENERGÍA CINÉTICA (Ec)

Es la capacidad que tiene un cuerpo, en movimiento, para realizar un trabajo en virtud a su masa "m" y a su velocidad "V".

$$Ec = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$



NOTA.-

Las unidades de medida son iguales a las de trabajo.

TRABAJO TRANSFORMADO O ENERGÍA TRANSFORMADA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

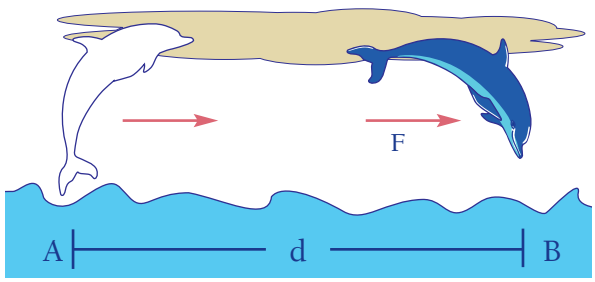
Es el trabajo realizado o energía desarrollada por un cuerpo en movimiento al pasar de una posición "A" a una posición "B".

$$T_{A-B} = E_{cf} - E_{ci}$$

T_{A-B} = Trabajo realizado por una fuerza "F" de A hasta B.

E_{cf} = Energía cinética final.

E_{ci} = Energía cinética inicial.



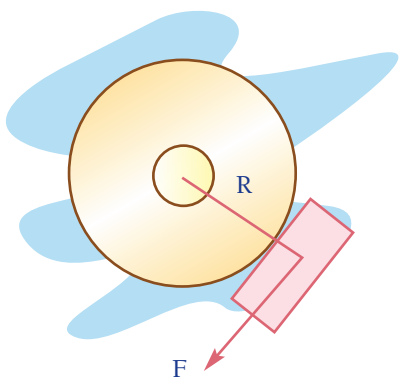
TRABAJO EN LAS ROTACIONES

$$T = M \cdot \alpha$$

T = Trabajo, en J

M = Momento aplicado al cilindro (F.R), en N . m

α = Angulo girado por el cilindro



ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot I \,.\, \omega^2$$

I = momento de inercia ($m \,.\, R^2$)

ω = velocidad angular ($\gamma \,.\, t$)

UNIDADES DE TRABAJO Y ENERGÍA

	J	erg	kW . h
1 J	1	10^7	$2{,}78 \,.\, 10^{-7}$
1 erg	10^{-10}	1	$2{,}78 \,.\, 10^{-14}$
1 kW . h	$0{,}36 \,.\, 10^7$	$0{,}36 \,.\, 10^{14}$	1

UNIDADES DE POTENCIA

	W	kW	erg/s	HP
1W	1	0,001	10^7	$136 \,.\, 10^{-5}$
1 kW	1000	1	10^{10}	136
1 erg/s	10^{-7}	10^{-10}	1	$136 \,.\, 10^{-10}$
1 HP	735	0,735	$735 \,.\, 10^7$	1

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

IMPULSO es el esfuerzo "F" que se hace durante un tiempo muy pequeño "Δt" sobre una masa, para darle un movimiento.

$$\vec{I} = \vec{F} \,.\, \Delta t$$

Unidades SI: N . s

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Es la velocidad "V" impresa a una masa "m" con una fuerza determinada.

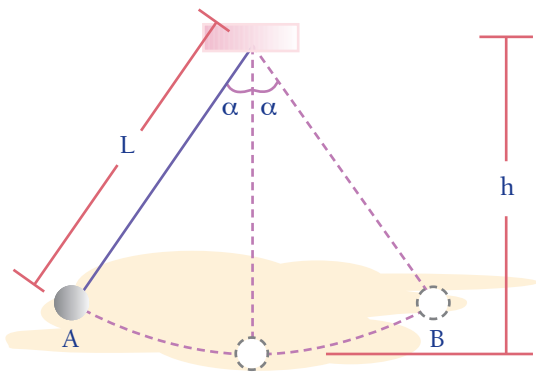
$$\vec{C} = m \,.\, \vec{V}$$

EL MOVIMIENTO OSCILATORIO Y EL PÉNDULO

A) PÉNDULO SIMPLE

Péndulo, es un objeto cualquiera que está suspendido de un punto fijo, mediante una cuerda.

ELEMENTOS DE UN PÉNDULO SIMPLE



1) LONGITUD "L", de la cuerda, desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad del objeto suspendido, medido en m.

2) OSCILACIÖN "2AB", es el arco recorrido en ida y vuelta por el objeto suspendido desde una de las posiciones extremas a la otra, medido en rad.

3) PERÍODO "T", tiempo que demora en una oscilación, medido en s.

4) AMPLITUD "α", ángulo barrido por la cuerda del péndulo con una de sus posiciones extremas y la vertical, medido en rad.

5) FRECUENCIA "f", es el número de oscilaciones en cada unidad de tiempo, medido en hertz; se calcula así:

$$f = \frac{1}{T}$$

Unidades SI: $\frac{1}{s}$ = hert

LEYES DEL PÉNDULO

1ra. Ley:

El período "T" de un péndulo, es independiente de su oscilación "2AB".

2da. Ley:

El período "T" de un péndulo, es independiente de su masa "m".

3ra. Ley:

El período "T" de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de "L".

$$\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}}$$

4ta. Ley:

El período "T" de un péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad "g".

$$\frac{T}{\sqrt{g_1}} = \frac{T_1}{\sqrt{g}}$$

PÉNDULO QUE BATE SEGUNDOS

Es aquel péndulo cuyo período dura 2 segundos.

$$T = 2s$$

FÓRMULA GENERAL DEL PÉNDULO:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

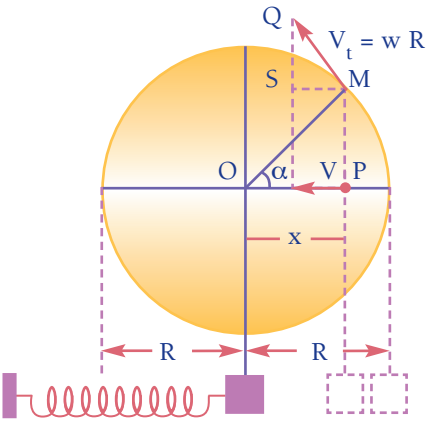
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE O MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO

Es un movimiento periódico y lineal, cuya aceleración "a" es directamente proporcional a su desplazamiento "x" pero con sentido contrario:

$$a = - K . x$$

ELEMENTOS DE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

El movimiento armónico simple es el movimiento lineal que realiza la proyección "P", sobre un diámetro, de un punto "M" que se desplaza sobre una circunferencia con velocidad circunferencial uniforme.



Los elementos son:

ELONGACIÓN "$\vec{x}$".- Es una magnitud vectorial cuyo valor se mide desde el centro de la circunferencia o desde el centro de vibración, hasta "P".

Se calcula asi:

$$x = R . \cos (\omega t)$$

$$x = R . \cos \frac{2\pi . t}{T}$$ unidades SI: m

$$x = R . \cos 2\pi . f . t$$

AMPLITUD "R".- Es la elongación máxima.

PERÍODO "T".- Tiempo que demora el punto "P" en hacer una vibración; es decir, una "ida y vuelta". Se calcula así:

$$T = \frac{\text{Tiempo transcurrido}}{\text{Número de vibraciones}}$$

FRECUENCIA "f".- Es el número de vibraciones por unidad de tiempo, se mide en ciclos por segundo (c.p.s) y se denomina "hertz". Se calcula así:

$$f = \frac{\text{Número de vibraciones}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

o:

$$f = \frac{1}{T}$$

RESORTES

FUERZA DEFORMADORA: LEY DE HOOKE

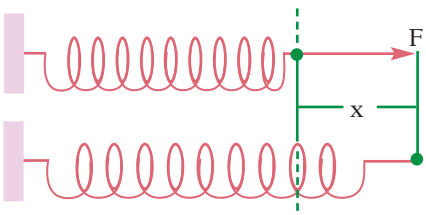
Para cambiar la forma de un cuerpos se requiere la acción de una fuerza que se llama "fuerza deformadora", la cual es proporcional a la deformación, siempre que no se pase del límite de elasticidad del cuerpo deformado.

La ley de Hooke se expresa así:

$$F = K \cdot x$$

K = constante elástica, propia de cada material

x = deformación o elongación



FUERZA RECUPERADORA:

$$F = -K \cdot x$$

VELOCIDAD, ACELERACIÓN, PERÍODO Y FRECUENCIA

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD "V"

$$V = V_t \cdot \text{sen}\ \omega\ t$$

$$\alpha = \omega\ t$$

$$V = -2\pi \cdot f \cdot R \cdot \text{sen}\ 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$V = \frac{2\pi \cdot R}{T} \cdot \text{sen}\ \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$V = \pm 2\pi \cdot f \sqrt{R^2 - x^2}$$

CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x$$

o:

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

o:

$$a = -4\pi^2 \cdot f^2 \cdot x$$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN MÁXIMAS

Si $V = \pm 2\pi \cdot f \sqrt{R^2 - x^2}$; V es máxima cuando x = 0

$$\therefore \quad V_{máx} = \pm 2\pi \cdot f \cdot R$$

La aceleración máxima se obtiene en los extremos; es decir, en la elongación máxima cuando x = ± R.

Si $a = -\omega^2 x$, aceleración es máxima cuando x = ± R

$$\therefore \quad a_{máx} = \mp \omega^2 \cdot R$$

o:

$$a_{máx} = \mp 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot R$$

o:

$$a_{máx} = \mp \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$$

PERÍODO Y FRECUENCIA

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

donde:

m = masa del cuerpo que tiene movimiento armónico, medido en kg.

K = constante de elasticidad del resorte o elástico.

DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

La densidad "δ" es el resultado de comparar, por división, la masa "m" de un cuerpo con su volumen "V".

$$\delta = \frac{m}{V}$$

Peso específico "ρ" es el resultado de comparar, por división, el peso "W" de un cuerpo entre su volumen "V".

$$\rho = \frac{W}{V}$$

RELACIÓN ENTRE DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

Su deducción:

$$\rho = \frac{W}{V}$$

Pero: $W = m \cdot g$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m \cdot g}{V}$$

Pero: $\frac{m}{V} = \delta$

Finalmente:

$$\rho = \delta \cdot g$$

ESTÁTICA DE LOS FLUÍDOS

Es el estudio de los líquidos en reposo. También se le denomina HIDROSTÁTICA que es sólo el estudio del agua en reposo.

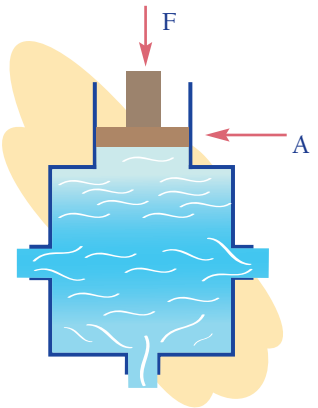
CONCEPTOS Y DEFINICIONES

PRESIÓN (P)

Es una magnitud tensorial. La unidad SI de presión es el PASCAL "Pa".

$$Pa = \frac{N}{m^2}$$

La presión es la acción de una fuerza "F" repartida en un área "A".



$$P = \frac{F}{A}$$

PRINCIPIO DE PASCAL

La presión que soporta un líquido lo transmite en todas direcciones y en la misma magnitud.

Ejemplo:

La fuerza "F" sobre el émbolo es 60 N, área del émbolo 0,2 m^2. Cada orificio tiene 1 cm^2, la presión con que sale el agua por cada orificio es:

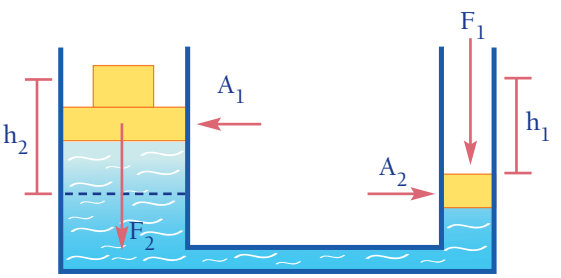
$$P = \frac{F}{A} = \frac{60N}{0{,}2m^2} = 300 \text{ Pa}$$

o:

$$P = 300 \frac{N}{m^2}$$

PRENSA HIDRÁULICA

En una prensa hidráulica, la fuerza se multiplica aún cuando la presión por unidad de área es la misma.



Multiplicación de fuerza

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Carrera o desplazamiento (h_1, h_2) de los émbolos o pistones.

$$\frac{h_1}{A_1} = \frac{h_2}{A_2}$$

PRINCIPIO DE LA HIDROSTÁTICA

La presión que soporta un cuerpo que está sumergido en un liquido se distribuye en toda la superficie del cuerpo y en forma perpendicular a esta superficie.

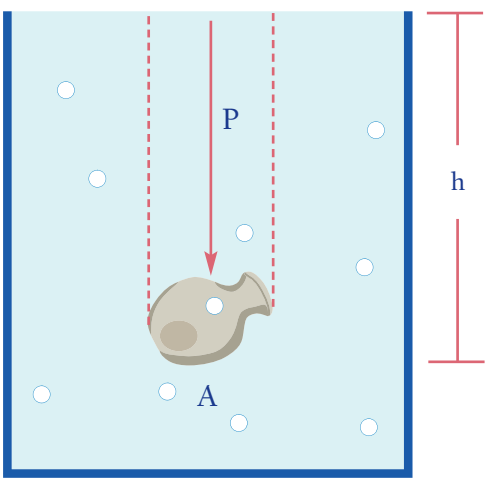
PRESIÓN HIDROSTÁTICA

Sea un cuerpo A sumergido.

$$P = h \cdot \rho$$

h = produndidad a la que está sumergido el cuerpo, en m.

ρ = peso específico del líquido, n N/m^3



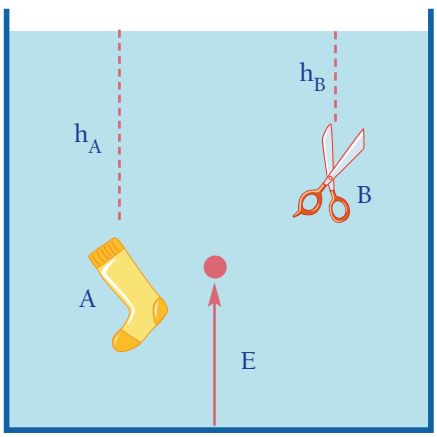
VASOS COMUNICANTES

Son un conjunto formado por dos o más recipientes conectados entre sí. Cuando al sistema se le llena un mismo líquido, el nivel superior en todos los recipientes alcanza el mismo nivel horizontal.

LEY FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTÁTICA

"La diferencia de presiones entre dos puntos, en un mismo líquido, es igual al peso específico del líquido por la diferencia de profundidades".

$$\Delta P = \rho\ (h_A - h_B)$$



EMPUJE HIDROSTÁTICO: $\vec{E}$

1) Todo cuerpo sumergido en un fluído soporta una fuerza de abajo hacia arriba, perdiendo aparentemente una parte de su peso, esa fuerza se llama empuje "E".

2) El volumen "V" de un líquido que es desalojado por un cuerpo cuando se sumerge en un líquido, es igual al volumen del cuerpo.

3) La aparente pérdida de peso, cuya magnitud es igual a la del empuje que experimenta un cuerpo sumergido en un líquido, es igual al peso del volumen del líquido desalojado.

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

"El empuje "E", o aparente pérdida de peso que experimenta un cuerpo sumergido en un líquido, es igual al peso del volumen del líquido desalojado".

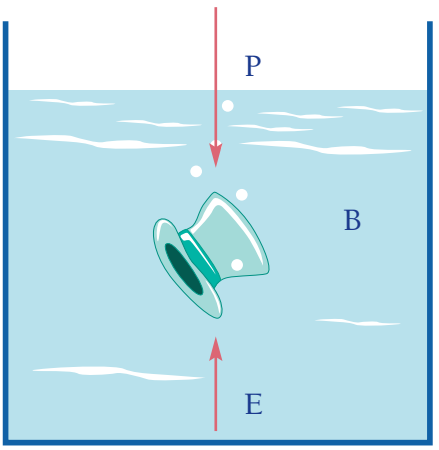
$$\vec{E} = V \cdot \rho$$

E = empuje del líquido = pérdida aparente de peso del cuerpo.

V . ρ = peso del líquido desalojado

V = volumen del cuerpo = volumen del líquido desalojado.

ρ = peso específico del líquido



RELACIÓN ENTRE EL EMPUJE Y EL PESO ESPECÍFICO DE LÍQUIDOS

"El empuje que soporta un cuerpo sumergido en un líquido, es directamente proporcional al peso específico del líquido".

$$\frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2}$$

NEUMOLOGÍA

Es el estudio de los gases. Los gases son fluidos aeroformes.

Los principios de Pascal y Arquímides tratados en este capítulo se cumple también para los gases.

Principio de Pascal

"La presión externa ejercida sobre un gas se transmite íntegramente a toda la masa gaseosa".

Principios de Arquímides

"Todo cuerpo sumergido en un gas, experimenta la acción de una fuerza vertical de abajo hacia arriba que es igual al peso del volumen del gas desalojado". Esta la razón por la que algunos cuerpos muy livianos, como un globo lleno de Helio, se elevan en la atmósfera.

FUERZA ASCENSIONAL (F_{as}).-

Es una fuerza vertical de abajo hacia arriba que ejerce un gas sobre un cuerpo sumergido en su masa.

$$F_{as} = E - w$$

E = empuje del gas, hacia arriba

W = peso del cuerpo

EL CALOR

Es una forma de energía de los cuerpos como consecuencia de la vibración molecular. El calor también se define como "energia de transito".

La unidad de calor SI es el JOULE "J". Tasmbién puede usarse la CALORIA "cal".

A) DILATACIÓN

Es el aumento que experimenta un cuerpo en sus dimensiones.

A.1) DILATACIÓN LINEAL "ΔL"

Es el aumento en su longitud (una dimensión) que experimenta una barra.

$$\Delta L = \lambda \cdot L \cdot \Delta t$$

Donde:

ΔL = dilatación lineal, en m.

λ = coeficiente de dilatación lineal propio de cada cuerpo.

L = longitud de la barra, en m.

Δt = variacíon de la temperatura, en C°.

LONGITUD FINAL "L_f"

Es la longitud al final de la elevación de la temperatura.

$$L_f = L\,(1 + \lambda \cdot \Delta t)$$

A.2) DILATACIÓN SUPERFICIAL "ΔA ÁREA FINAL "A_f"

Dilatación superficial, es el aumento que experimenta un cuerpo en sus DOS dimensiones.

$$\Delta A = \beta \cdot A \cdot \Delta t$$

$$A_f = A(1 + \beta \cdot \Delta t)$$

A.3) DILATACIÓN VOLUMÉTRICA "ΔV" VOLUMEN FINAL V_f

Dilatación volumétrica es el aumento que experimenta un cuerpo en sus TRES dimensiones.

$$\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta t$$

$$V_f = V(1 + \gamma \cdot \Delta t)$$

VARIACIÓN DEL PESO ESPECÍFICO "ρ" CON LA TEMPERATURA.-

$$\rho_f = \frac{\rho_i}{1 + \gamma \cdot \Delta t}$$

ρ_f = peso específico final.

ρ_i = peso específico inicial.

γ = coeficiente de dilatación volumétrica.

B. CALORIMETRÍA

Es el estudio de la medida del calor.

UNIDADES PARA MEDIR EL CALOR

1) JOULE "J".- Es la unidad SI para medir el calor.

2)CALORÍA "cal" (no es sistema SI).- Es otra unidad para medir el calor. Se define así:

"Es la cantidad de calor que necesita la masa de 1 gramo de agua pura para elevar su temperatura en 1 °C (de 14,5 °C a 15,5 °C).

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}$$

3) B.T.U. (British Termical United)(No es unidad SI).-

Es la unidad inglesa para medir el calor, se define así: "Cantidad de calor que necesita 1 libra-masa de agua pura para subir su temperatura en 1 °F.

EQUIVALENCIA DE 1 B.T.U. EN CALORÍAS

$$1 \text{ B.T.U.} = 252 \text{ calorías}$$

CALOR ESPECÍFICO "C.e."

Es la cantidad de calor que gana o pierde la masa de 1 g de una sustancia para subir o bajar 1 °C su temperatura.

ALGUNOS CALORES ESPECÍFICOS

$$\left(\text{en } \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}\right)$$

Líquidos	
Agua	1,00
Agua de mar	0,95
Alcohol	0,60
Mercurio	0,033

Sólidos	
Aluminio	0,212
Cobre	0,093
Fierro	0,11
Hielo	0,53
Plomo	0,031
Zinc	0,093

LEY DE DULONG Y PETIT

$$Ma \cdot Ce = 6{,}22$$

Ma = masa atómica de un elemento, en g

Ce = calor específico del elemento, en cal/g . °C

CALOR SENSIBLE "Q" (CALOR GANADO O PERDIDO)

Es la cantidad de calor que un cuerpo gana o pierde al variar su temperatura.

$$Q = Ce \cdot m \cdot \Delta t$$

Q = cantidad de calor ganado o perdido, en cal

C.e. = calor específico, en cal/g . °C

m = masa del cuerpo, en g

Δt = variación de la temperatura, en °C

EQUIVALENCIA EN AGUA DE UN CALORÍMETRO

Es una porción de masa de agua "M" que absorbe la misma cantidad de calor que la masa "m" de un calorímetro.

$$M_{H2O} \cdot Ce_{H2O} = m_{cal} \cdot Ce_{cal}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA CALORIMETRÍA

Al ponerse en contacto 2 cuerpos, hay una transmisión de calor y "**el calor ganado por uno de ellos es igual al calor perdido por el otro**".

$$Q_{\text{calor ganado por uno de ellos}} = Q_{\text{calor perdido por el otro}}$$

CAPACIDAD CALORÍFICA "C_c"

Es la cantidad de calor que absorve cierta masa de un cuerpo para elevar su temperatura en 1 °C.

$$C_C = m \cdot Ce$$

TEMPERATURA DE EQUILIBRIO DE UNA MEZCLA.- TEMPERATURA FINAL "t_f"

Está dada bajo el principio fundamental de que en una mezcla de cuerpos de temperaturas diferentes, el calor entregado por uno de los cuerpos es igual al calor absorbido por el otro, lo que origina una temperatura intermedia de la mezcla, llmada también temperatura final "t_f" o temperatura de equilibrio.

$$Q_1 = Q_2$$

$$t_f = \frac{Ce_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + Ce_2 \cdot m_2 \cdot t_2 + \ldots}{Ce_1 \cdot m_1 + Ce_2 \cdot m_2 + \ldots}$$

C. CAMBIO DE FASE

Por acción del calor todos los cuerpos cambian de fase o de estado. Mientras dura el cambio de fase, la temperatura no varía.

CALORES LATENTES

Es la cantidad de calor que gana o pierde una unidad de masa durante el cambio de estado.

$$C_f = \frac{Q}{M}$$

De fusión, si gana

De solidificación, si pierde

$$C_v = \frac{Q}{m}$$

De vaporización, si gana

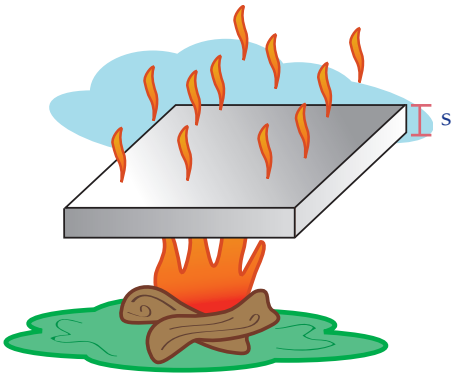
De condensación, si pierde

D. TRANSMISIÓN DE CALOR

El calor se transmite por CONVECCIÓN en los líquidos y gases, por CONDUCCIÓN en los sólidos y por RADICACIÓN. En este libro se trata sólo la transmisión del calor por conducción.

TRANSMISIÓN DEL CALOR POR CONDUCCIÓN

Es el calor que pasa a través de la masa de un cuerpo.



CANTIDAD DE CALOR TRANSMITIDO "Q"

Es la cantidad de calor que pasa de un punto a otro a través de un conductor.

$$Q = KSG\tau$$

Q = cantidad de calor transmitido a través del conductor.

K = coeficiente de conductibilidad térmica propia de cada sustancia.

S = sección del conductor.

G = gradiente o caída de la temperatura (t_1 - t_2).

τ = tiempo durante el cual se ha transmitido el calor.

$$G = \frac{t_1 - t_2}{e}$$

e = espesor del conductor o longitud según sea el caso.

t_1 - t_2 = diferencia de temperaturas en las caras de un cuerpo.

TRABAJO MECÁNICO DEL CALOR

Experimentalmente, Joule encontró el equivalente mecánico del calor:

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0{,}24 \text{ cal}$$

TERMODINÁMICA

"Es el estudio de la fuerza mecánica del calor" o también "el estudio de la relación que existe entre el calor y el trabajo".

TRABAJO REALIZADO POR UN GAS: "W"

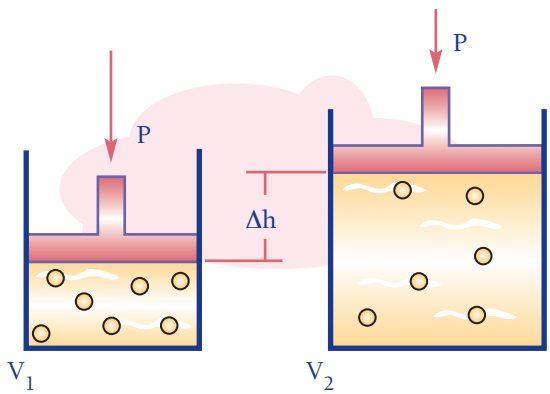
Cuando se calienta un gas a presión "P" constante, se realiza un trabajo (Ley de Charles).

$$W = P \cdot \Delta V$$ Unidades SI: J

P = presión que soporta el gas constante

ΔV = variación de volumen

$$\Delta V = V_2 - V_1$$



$$1 \text{ atm} \cdot L = 101{,}3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

o:

$$1 \text{ atm} \cdot L = 101{,}3 \text{ J}$$

o:

$$1 \text{ atm} \cdot L = 24{,}15 \text{ cal}$$

CALOR ABSORBIDO POR UN GAS: "Q"

Es la cantidad de calor que absorbe una masa gaseosa "m" para aumentar su temperatura "Δt", manteniendo su presión o su volumen constante.

$$Q = Ce \cdot m \cdot \Delta t \Rightarrow Ce = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}$$

Q = calor absorbido por un gas en "J"

M = masa del gas que absorbe calor en "g"

Δt = variación de la temperatura en "°C"

Ce = calor específico del gas en $\frac{cal}{g \cdot °C}$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

"En toda transformación entre calor y trabajo la cantidad de calor entregado a un sistema es igual al trabajo realizado "W", más el aumento de su energía interna "ΔE".

$$Q = W + \Delta E$$

Q = calor entregado

W = trabajo realizado

ΔE = variación de energía interna

RENDIMIENTO "R" O EFICIENCIA EN UNA MÁQUINA TÉRMICA

El rendimiento de una máquina térmica que absorbe calor para transformarlo en trabajo, depende del calor entregado "Q" y el trabajo realizado "W":

$$\% = \frac{W}{Q} \cdot 100$$

o:

$$R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

o:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Q_1 = calor entregado en "J".

Q_2 = calor absorbido por la fuente fría o calor no aprovechado en realizar trabajo, en "J".

T_1 = temperatura absoluta mayor en "K".

T_2 = temperatura absoluta menor en "K".

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA (Rudolf Clausius 1850)

"En una máquina térmica es imposible el movimiento continuo que, sin recibir calor del exterior, pueda transferir calor un foco frío a otro foco caliente".

ELECTROSTÁTICA

Estudia las cargas eléctricas en reposo.

PRIMERA LEY DE LA ELECTROSTÁTICA

Es una ley CUANTITATIVA: "Los cuerpos cargados con el mismo signo de electricidad se repelen, los cuerpos cargados con signos contrarios se atraen".

TABLA TRIBOELÉCTRICA

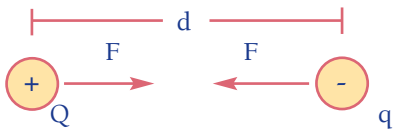
La tabla indica que: una sustancia frotada con la que le precede en el orden de la tabla, se carga negativamente; frotada con la que le sigue se carga positivamente.

1. Piel de gato	5. Marfil
2. Vidrio	6. Seda
3. Mica	7. Algodón
4. Lana	8. Platino

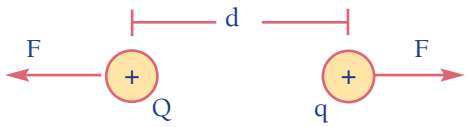
SEGUNDA LEY DE LA ELECTROSTÁTICA: LEY DE COULOMB

Es una ley CUANTITATIVA: "La fuerza de atracción o repulsión en la línea que une los centros entre dos cargas electrostáticas, es directamente proporcional al producto de sus masas eléctricas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros".

Se atraen:



Se repelen:



$$F = K \frac{Q \cdot q}{d^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q \cdot q}{d^2}$$

F = fuerza de atracción o repulsión, en newtons (N).

Q,q = masas eléctricas que pueden ser positivas y/o negativas, en coulombios (C).

d = distancia entre los centros de masa eléctrica, en metros "m".

K = coeficiente de proporcionalidad que depende del medio ambiente y de las unidades de F, Q, q, d.

ε = coeficiente de permitividad del medio, en $C/N \cdot m^2$.

UNIDADES ELÉCTRICAS

UNIDADES SI

F, en newton "N"

Q y q, en coulombio "C"

d, en metro "m"

$$K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

(en el vacío o en aire)

PERMITIVIDAD "ε"

Es el grado de dificultad que ofrece una medio al paso de la corriente eléctrica.

El valor de K depende de la permitividad.

La permitividad en el aire o en el vacío se denota "ε_o"

$$K = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_O} \qquad (I)$$

$$\varepsilon_O = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{C}{N \cdot m^2} \qquad (\alpha)$$

$$\varepsilon_O = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{N \cdot m^2} \qquad (\beta)$$

Sustituyendo (α) en (I):

$$K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

En un medio distinto al aire o vacìo la permitividad es siempre mayor.

$$\varepsilon > \varepsilon_O$$

o:

$$\varepsilon = \gamma \cdot \varepsilon_O$$

γ = constante adimensional, llamada constante dieléctrica relativa o capacidad inductiva específica.

En el vacío o en el aire: $\gamma = 1$

UNIDADES ELÉCTRICAS COULOMB "C"

Es la unidad SI de masa eléctrica, se define como: "una carga eléctrica situada frente a otra igual, a 1 m de distancia y en el vacío, que se repelen o se atraen con una fuerza de $9 \cdot 10^9$ N.

EQUIVALENCIAS (e = carga de un electrón)

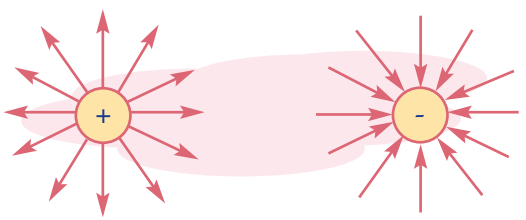
1 C	$= 8{,}25 \cdot 10^{18}$ e
1 C	$= 3 \cdot 10^{9}$ u.e.q.
1 (-e)	$= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
1 (+e)	$= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
1 u.e.q.	$= 0{,}33 \cdot 10^{-9}$ C
1 u.e.q.	$= 2{,}72 \cdot 10^{9}$ e
1 e	$= 0{,}48 \cdot 10^{-9}$ u.e.q.
Masa 1 e	$= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ Rg
Masa 1 protón	$= 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ Rg
1 u.e.q.	= 1 stc = 1 franklin

CAMPO ELÉCTRICO

Es un "ambiente" que rodea a una masa eléctrica y que está sometido a la influencia de esta carga o masa eléctrica. (Es como la atmósfera que rodea a la Tierra).

Los campos eléctricos se representan por líneas imaginarias que se llaman líneas de fuerza.

Convencionalmente, se acepta que las líneas de acción, o de fuerza de un campo eléctrico "**nacen**" en una **carga positiva** y se "**dirigen hacia**" una **carga negativa**.

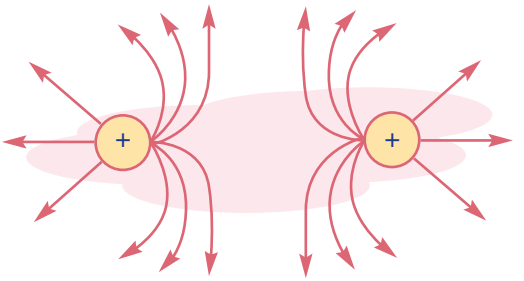


Campo de una carga (+) (nacen las líneas de acción)

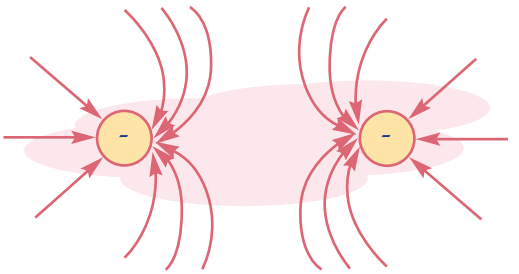
Campo de una carga (-) (llegan las líneas de acción)

CAMPOS DE CARGAS IGUALES

Las líneas de acción se rechazan, en ambos casos.



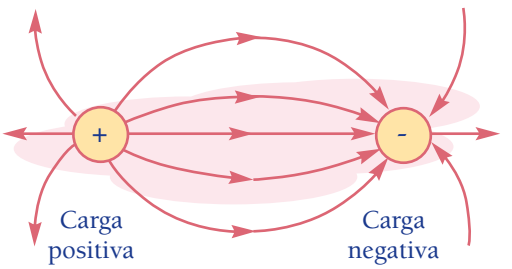
Ambas positivas



Ambas negativas

CAMPO DE CARGAS DISTINTAS

Las líneas de acción se complementan.



INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO "$\vec{E}$"

"Es una magnitud vectorial "$\vec{E}$" que representa la fuerza "$\vec{F}$", de atracción o repulsión, ejercida sobre cada unidad de carga "q" en un punto del campo eléctrico".

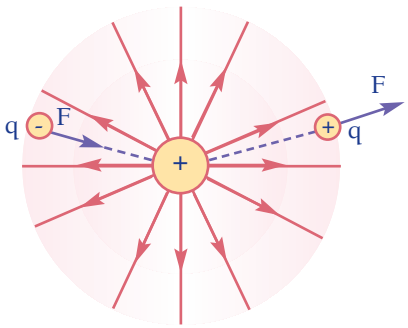
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

UNIDADES SI

F = fuerza, en newton "N"

q = carga puntual, en coulomb "C"

E = intensidad de campo, en $\frac{N}{C}$



INTENSIDAD "E" DEL CAMPO, A UNA DISTANCIA "r" DE LA MASA CREADORA DEL CAMPO

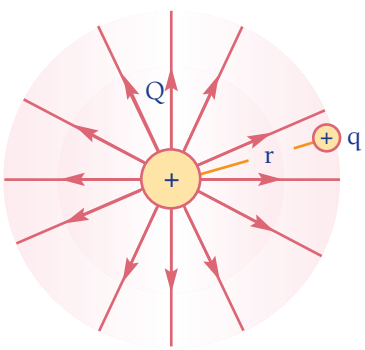
$$E = K \frac{Q}{r^2}$$

K = constante = $9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

E = intensidad de campo, en $\frac{N}{C}$

Q = masa eléctrica, creadora del campo, en coulombios "C".

r = distancia del "punto", en el campo, a la carga "Q", en metros "m".



POTENCIAL ELÉCTRICO

Potencial eléctrico de un punto en un campo eléctrico, es el trabajo que se realiza para trasladar la unidad de carga eléctrica ubicada en el infinito, hasta el punto P ubicado dentro del campo.

$$V_P = \frac{W_{\infty \rightarrow P}}{q}$$

UNIDADES SI

V_P = potencial en el punto P, en voltios "V".

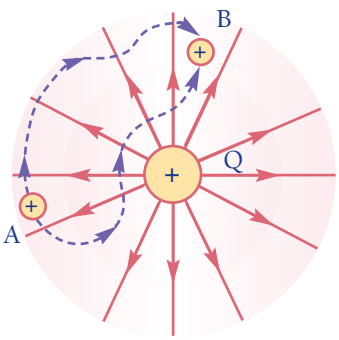
$W_{\infty \rightarrow P}$ = trabajo realizado para llevar q desde el infinito hasta P, en joules "J".

q = carga puntual, en coulombios "C".

DIFERENCIA DE POTENCIAL

Es el trabajo que se realiza para trasladar una carga puntual desde un punto A hasta un punto B, ambos ubicados en el mismo campo.

$$V_B - V_A = \frac{V_{AB}}{q} \Rightarrow V = \frac{J}{C}$$



El trabajo "W" puede ser:

a) Positivo, si:

Potencial de B > Potencial de A

b) Negativo, si:

Potencial de B < Potencial de A

c) Nulo, si:

Potencial de B = Potencial de A

Comúnmente, se supone A en el infinito, en consecuencia $V_A = 0$.

$$\therefore \quad V_B = \frac{W_B}{q}$$

POTENCIAL "W" DE UN PUNTO EN FUNCIÓN DE "E" Y "r"

$$V = E \cdot r$$

POTENCIAL "V" DE UN PUNTO EN LAS PROXIMIDADES DE LA CARGA "Q"

$$V = K \frac{Q}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q}{r}$$

UNIDADES SI:

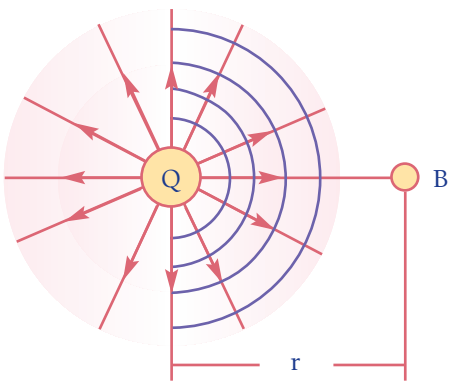
$K = 9 \cdot 10^9 \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$

Q = coulombio "C"

r = metro "m"

$V = \dfrac{\text{joulio}}{\text{coulombio}}$

= voltio "V"



TRABAJO ELÉCTRICO

$$W_{AB} = q\,(V_B - V_A)$$

o:

$$W = q \cdot V$$

W = trabajo, en joules "J"

Q = carga trasladada, en coulombios "C"

V_A = potencial en el punto A, en voltios "V"

V_B = potencial en el punto B, en voltios "V"

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

Esta fórmula permite calcular el trabajo que debe realizarse para separar 2 cargas eléctricas Q y q, una distancia "r" o para juntarlas.

CAPACIDAD ELÉCTRICA

Es la cantidad de carga eléctrica almacenada por un conductor o por un condensador por unidad de diferencias de potencial.

A) CAPACIDAD DE LOS CONDUCTORES AISLADOS

$$C = \frac{Q}{V}$$

UNIDADES SI:

C = capacidad, en faradios "F"

Q = carga almacenada, en coulombios "C"

V = diferencia de potencial, en voltios "V"

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ coulombio}}{1 \text{ voltio}}$$

o:

$$F = \frac{C}{V}$$

EQUIVALENCIA DE 1 FARADIO EN u.e.c.-

$$1 \text{ faradio} = 9 \cdot 10^{11} \text{ u.e.c.}$$

OTRAS EQUIVALENCIAS (en micro y pico faradios).-

El prefijo SI para 10^{-12} es pico "p", que sustituye a mm.

$$1 \text{ faradio} = 10^6\ \mu f$$

$$1\ \mu f = 10^6\ pf$$

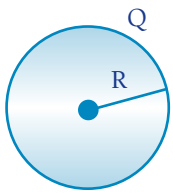
$$1\ faradio = 10^{12}\ pf$$

$$1\ \mu f = 9\ .\ 10^5\ u.e.c.$$

$$1\ pc = 0{,}9\ u.e.c.$$

B) CAPACIDAD DE UNA ESFERA AISLADA

Si se considera el potencial "V" en la superficie:



$$C = \frac{R}{K}$$

Como $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}$; se tiene:

$$C = 4\pi\varepsilon_O R$$

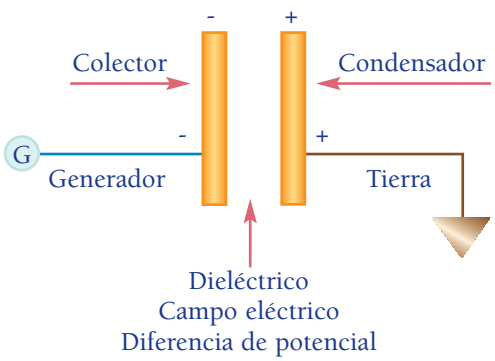
CONDENSADORES

Son aparatos o dispositivos que sirven para guardar o almacenar cargas eléctricas, pero por poco tiempo.

Un condensador lo forman dos cuerpos, y entre ellos existe un campo eléctrico y una diferencia de potencial.

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR

$$C = \frac{Q}{V}$$



Unidades que se emplea:

c.g.s. : $u.e.c. = \frac{u.e.q.}{u.e.v.}$

Unidades SI: $faradio = \frac{coulombio}{Voltio}$

1 microfaradio "μf" = 10^{-6} faradios

1 picofaradio "pf" = 10^{-12} faradios

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR PLANO

$$C = \frac{A}{d}$$

C = capacidad, en metros "m".

A = área del condensador, en m^2.

d = distancia entre placas, en m.

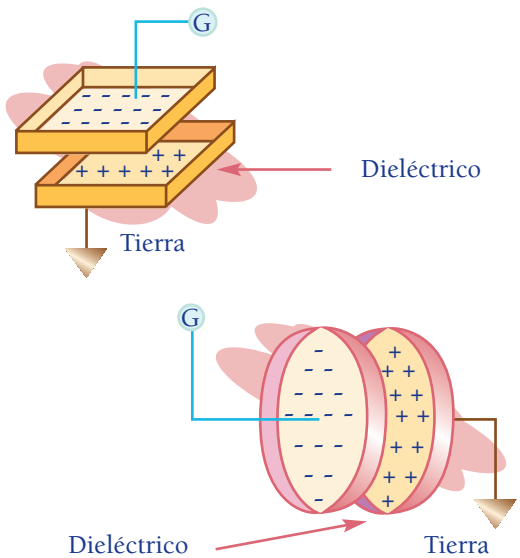
PARA CALCULAR EN FARADIOS.-

$$C = \tau\ .\ \varepsilon_O\ \frac{A}{d}$$

C = capacidad, en faradios "F"

τ = constante del dieléctqrico, en el aire y vacío = 1

$$\varepsilon_O = 8{,}85\ .\ 10^{-12}\ \frac{faradios}{metro}$$

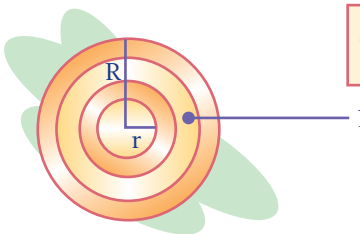


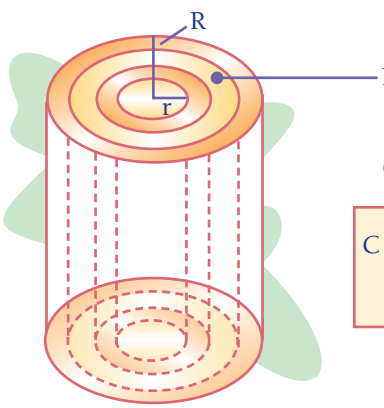
CONSTANTES DIELÉCTRICAS "τ"			
Vacío	1	Ebonita	2,5
Aire	1	Gutapercha	4,5
Agua	81	Mármol	8,0
Alcohol	27	Mica	5,0
Bakelita	5,0	Resina	2,5
Azufre	3,5	Madera seca	4,5
Vidrio	5,5		

CAPACIDAD DE CONDENSADOR ESFÉRICO Y CILÍNDRICO

Esfera:

$$C = \tau\varepsilon_O \frac{Rr}{R - r}$$





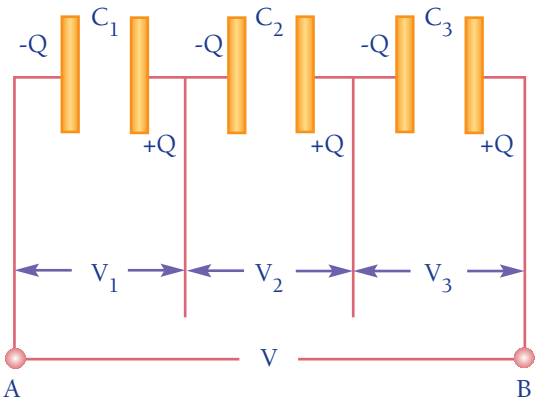
Cilindro:

$$C = \tau\varepsilon_O \frac{h}{2 \ln \frac{R}{r}}$$

$$C = \tau\varepsilon_O \frac{h}{4{,}6 \log \frac{R}{r}}$$

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

A. EN SERIE O CASCADA



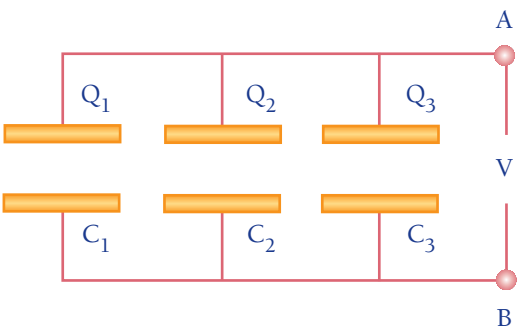
SUS CARACTERÍSTICAS:

1) $V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$

2) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$

3) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots.$

B. EN PARALELO



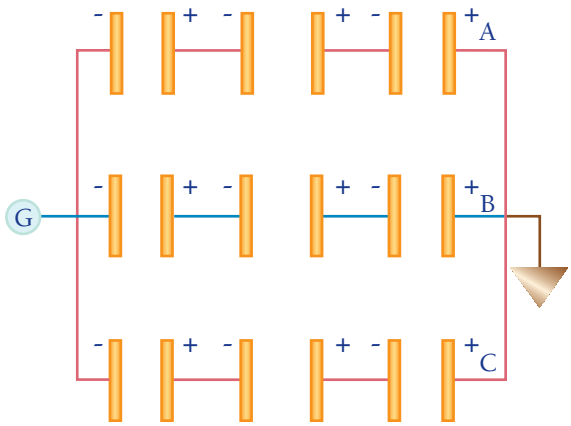
SUS CARACTERÍSTICAS:

1) $V = V_1 = V_2 = V_3 = \ldots$

2) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$

3) $C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$

C. EN BATERÍA O MIXTO



SUS CARÁCTERÍSTICAS:

$$C = N \frac{C_1}{n}$$

La capacidad de cada uno de los condensadores es igual a C_1.

N = número de conexiones en serie

n = número de condensadores en cada serie

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR

Cuando un condensador se carga, empieza con Q = 0 y por consiguiente la diferencia de potencial también es 0: V = 0, a medida que se va cargando, la diferencia de potencial subre de 0 a "V" y el valor medio es la diferencia, entre dos: "V/2".

El trabajo necesario para trasladar una carga "Q" a través de una diferencia de potencial "V/2" es:

$$W = \frac{1}{2} VQ$$

o:

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

o:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Unidades SI:

W en joules "J".

Q en coulombios "C".

V en voltios "V".

C en faradios "F".

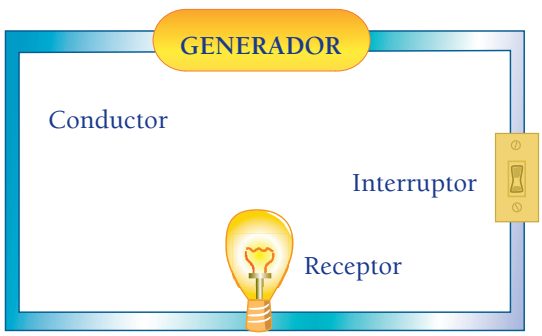
ELECTRODINÁMICA

Es el estudio de partículas eléctricas en movimiento a través de conductores.

CORRIENTE ELÉCTRICA

Es el flujo de electrones a través de un conductor.

PARTES DE UN CIRCUITO ELÉCTRICO



UNIDADES SI PARA MEDIR LA CORRIENTE ELÉCTRICA

INTENSIDAD

$$i = \frac{Q}{t}$$

i = intensidad, en amperios: "A".

Q = masa eléctrica, en coulombios: "C".

T = tiempo, en segundos: "s".

DIFERENCIA DE POTENCIAL

$$E = \frac{W}{Q}$$

E = fuerza electromotriz, (f.e.m.) en voltios "V".

W = energía desplazada, en joulios: "J".

Q = carga eléctrica desplazada, en coulombios: "C".

RESISTENCIA ELÉCTRICA

$$R = \frac{E}{i}$$

R = resistencia del conductor o aparato receptos, en ohmios: "Ω".

E = f.e.m. en voltios "V".

i = intensidad, en amperios "A".

NOTA.-

1) La letra que se usa como símbolo del ohmio es "Ω".

2) Al voltaje o diferencia de potencial también se le llama "caída de potencial".

3) El "ohmio patrón" es la resistencia que ofrece un alambre de mercurio (Hg) de 1,063 m de longitud, de 1 mm de diámetro de sección, a 0°C, al paso de un amperio de corriente eléctrica cuando la diferencia de potencial es de 1 voltio.

RESISTENCIA DE LOS CONDUCTORES

La resistencia, es la dificultad que ofrece un conductor al paso de la corriente.

LEY DE POUILLET

"La resistencia de un conductor homogéneo, de sección recta constante, es directamente proporcional a su longitud "L" e inversamente proporcional a su sección recta "A".

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R = resistencia del conductor, en ohmio "Ω"

ρ = resistividad, o resistencia específica propia de cada material, en ohmios . cm

L = longitud del conductor, en metros: "m"

A = área de la sección del conductor, en "m²"

CONDUCTANCIA

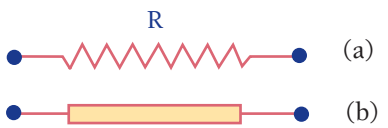
Es la inversa de la resistencia.

$$G = \frac{1}{R}$$

G = conductancia, en ohms: "Ω"

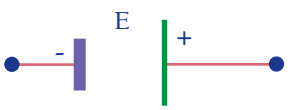
R = resistencia, en ohms: "Ω"

ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS



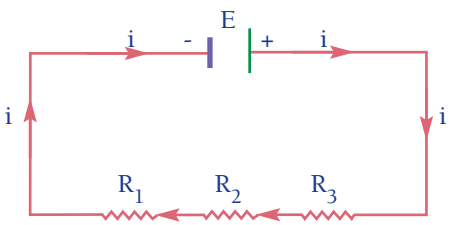
Representación de una resistencia

(a) americana (b) alemana



Representación de un generador

A. EN SERIE



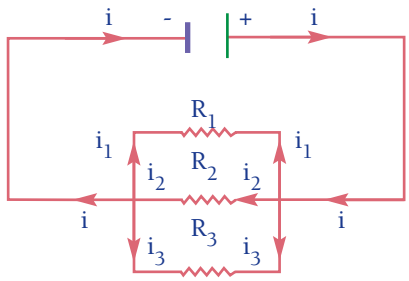
SUS CARACTERÍSTICAS:

1) $i = i_1 = i_2 = \ldots$

2) $R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$

3) $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$

B. EN PARALELO



SUS CARACTERÍSTICAS:

1) $i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots$

2) $\frac{i}{R} = \frac{i}{R_1} + \frac{i}{R_2} + \frac{i}{R_3} + \ldots$

3) $E = E_1 = E_2 = E_3 = \ldots$

Las intensidades en cada ramal son inversamente proporcionales a sus resistencias:

$$\frac{i_1}{R_2} = \frac{i_2}{R_1} \quad ; \quad \frac{i_2}{R_3} = \frac{i_3}{R_2}$$

$$\frac{i_1}{R_3} = \frac{i_3}{R_1}$$

FUERZA ELECTROMOTRIZ Y RESISTENCIA TOTAL EN UN CIRCUITO

Caída de tensión externa

$E_e = i \cdot R_e$

Caída de tensión interna

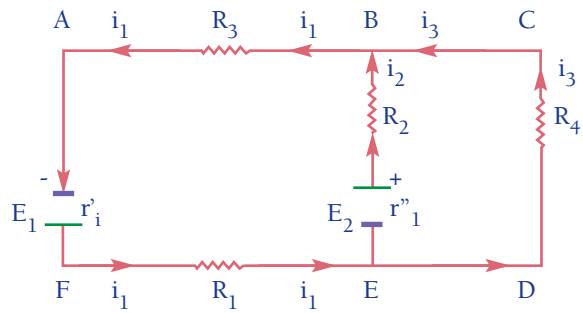
$E_i = i \cdot r_i$

Caída de tensión total

$E_T = E_e + E_i$

CORRIENTES DERIVADAS LEYES DE KIRCHOFF

La dirección que se les asigna a la corriente en cada nudo es arbitraria. Si ha sido equivocada, el proceso de solución matemático lo indicará.



1ra. LEY: DE LOS NUDOS

"La suma algebraica de las intensidades de las corrientes que llegan a un nudo es cero" o "La suma de las intensidades que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen del nudo".

$$\boxed{\sum i = 0}$$

Ejemplo:

Nudo B : $i_2 + i_3 = i_1$

2da. LEY: DE LAS MALLAS

"La suma algebraica de las fuerzas electromotrices de una malla cualquiera es igual a la suma algebraica de los productos de las intensidades por las respectivas resistencias".

$$\boxed{\sum E = \sum i \cdot R}$$

Ejemplo:

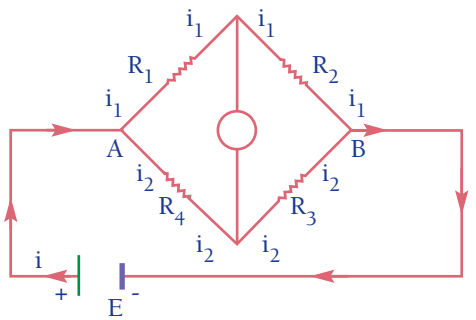
Para la malla ABEF

$$E_1 + E_2 = i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot r''_1 + i_2 \cdot R_2 + i_1 \cdot R_3 + i_1 \cdot r'_1$$

PUENTE DE WHEATSTONE

"Si el puente de Wheatstone se halla en equilibrio, el producto de las resistencias opuestas, son iguales".

$$\boxed{R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4}$$



ENERGÍA Y POTENCIA DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

ENERGÍA ELÉCTRICA

Es la capacidad de la corriente eléctrica para realizar un trabajo. Puede ser: a) Energía consumida por aparatos eléctricos; b) Energía producida por un generador.

a) ENERGÍA CONSUMIDA O DISIPADA

$$W = V \cdot Q \qquad \text{(I)}$$

UNIDADES SI

W = energía consumida, en joules "J".

V = diferencia de potencial, en volts: "V".

Q = carga eléctrica consumida, en coulombios "C".

La fórmula (I) puede tomar otras formas:

Si: $Q = i \cdot t$

$$\therefore \quad W = V \cdot i \cdot t$$

Si: $i = \dfrac{V}{R}$

$$\therefore \quad W = \frac{V^2 \cdot t}{R}$$

Si : $V = i \cdot R$

$$\therefore \quad W = i^2 \cdot R \cdot t$$

b) ENERGÍA PRODUCIDA POR UN GENERADOR

$$W = E \cdot Q \qquad \text{(II)}$$

W = energía del generador, en joules "J".

E = f.e.m. del generador, en volts: "V".

Q = carga suministrada por el generador, en coulombs "C".

POTENCIA DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

$$P = \frac{W}{t} \qquad \text{(I)} \rightarrow \text{watt} = \frac{\text{joule}}{\text{s}}$$

$$W = \frac{J}{s}$$

La fómurla (I) puede tomar otras formas en función de otras mediciones de corrientes, así:

Si: $W = E \cdot Q$

$$\therefore \quad P = \frac{E \cdot Q}{t}$$

Si: $Q = i \cdot t$

$$\therefore \quad P = i \cdot E$$

Si: $i = \dfrac{E}{R}$

$$\therefore \quad P = \frac{E^2}{R}$$

Si: $E = i \cdot R$

$$\therefore \quad P = i^2 \cdot R$$

EQUIVALENCIAS:

$$1\ k \cdot W = 10^3\ W$$

$$1kW \cdot h = 3{,}6 \cdot 10^6\ J$$

EFECTO JOULE o LEY DE JOULE

"El calor "Q" disipado por un conductor al pasar la corriente a través de él, es directamente proporcional a la energía eléctrica "W" gastada para vencer la resistencia del conductor".

$$Q = 0{,}24 \cdot W$$

Si: $W = i^2 \cdot R \cdot t$

$$\therefore \quad \boxed{Q = 0{,}24 \cdot i^2 \cdot R \cdot t}$$

Donde:

0,24 = factor de conversión de joules a calorías (0,24 cal/J).

Q = calor producido, en calorías: "cal".

i = intensidad de la corriente, en amperes: "A".

R = resistencia del conductor, en ohms: "Ω".

t = tiempo que circula la corriente, en segundos: "s".

$$\boxed{1\ J = 0{,}24\ cal}$$

RENDIMIENTO DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\rho = \frac{P_u}{P_t}}$$

ρ = rendimiento adimensional.

P_u = potencia utilizada en watts "W" o "kW".

P_t = potencia suministrada, en watts "W" o "kW".

$P_u = P_t$ - Potencia perdida en el generador.

$P_u = E \cdot i - i^2 \cdot R$.

Sustituyendo en (I) y efectuando:

$$\boxed{\rho = 1 - \frac{i \cdot R}{E}}$$

$$\rho = 1 - \frac{\text{amperio . ohmio}}{\text{voltio}} = 1 - \frac{A \cdot \Omega}{V}$$

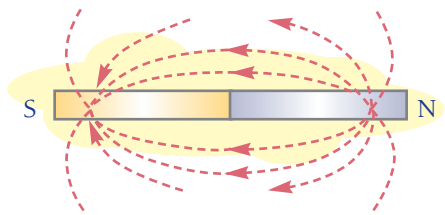
MAGNETISMO Y ELECTROMAGNETISMO

A) MAGNETISMO

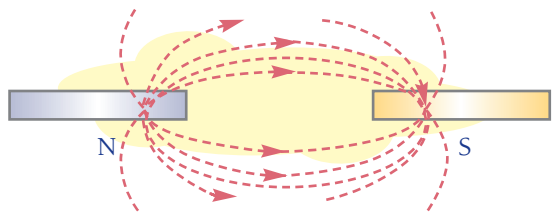
Propiedad que tienen algunos cuerpos de atraer el hierro, de acuerdo a ciertas leyes físicas.

LÍNEAS DE FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO

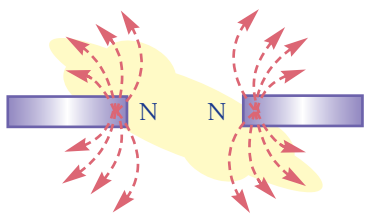
Son líneas imaginarias que van de un polo a otro polo de un imán.



Líneas de fuerzas magnéticas en un campo creado por polos diferentes:



Líneas de fuerza magnéticas en un campo creado por polos diferentes:



LEYES MAGNÉTICAS

1ra. LEY CUALITATIVA

"Polos iguales se repelen, polos contrarios se atraen".

2da. LEY CUANTITATIVA (Coulomb Magnética)

"La fuerza de atracciòn o repulsiòn entre dos polos magnéticos es directamente proporcional a las masas magnéticas de los polos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

$$F = K_M \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

UNIDADES SI:

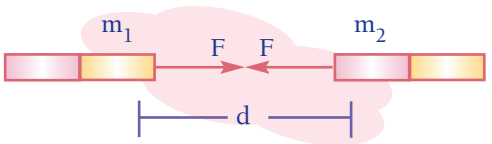
F = fuerza de atracción o repulsión, en "N".

$m_1 \cdot m_2$ = masas magnéticas de los polos, en amperio . metro "A . m".

d = distancia entre polos, en metros "m".

K_M = constante magnética.

$$= 10^{-7} \frac{N \cdot m^2}{(A \cdot m)^2}$$



DEFINICIÓN DE "A . m"

"La unidad de masa magnética "A . m" es la que es capaz de rechazar o atraer a otra masa magnética igual y que esté a 1 m de distancia, en el vacío, con una fuerza de 10^{-7} N".

INTENSIDAD "B" DE UN PUNTO DEL CAMPO MAGNÉTICO

Es el poder magnético de un punto en las cercanías de un imán. Sea "m_O" una masa magnética de polo en un punto de un campo, la intensidad se expresa así:

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{m_O}$$

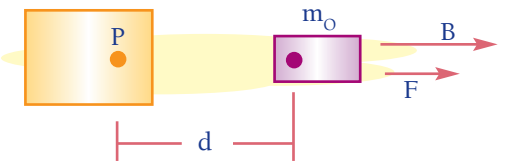
$\vec{B}$ = intensidad del campo magnético, medido en teslas "T".

Un submúltiplo de tesla es el gauss

$$1\ T = 10^4\ G \Rightarrow 1\ G = 10^{-4}\ T$$

$\vec{F}$ = fuerza, en "N".

m_O = masa magnética, en "A . m".



INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDA POR UN POLO

$$\vec{B} = K_M \frac{M}{d^2}$$

$\vec{B}$ = intensidad del campo magnético a la distancia "d", en tesla "T".

M = masa magnética del polo, en "A . m".

d = distancia del polo a un punto del campo, en metros "m".

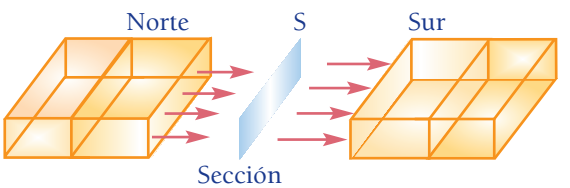
K_M = constante de permeabilidad magnética, en:

$$K_M = 10^{-7} \frac{N \cdot m^2}{(A \cdot m)^2}$$

FLUJO MAGNÉTICO "ϕ"

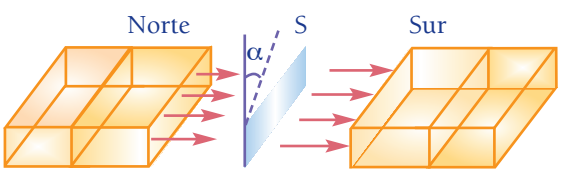
Se llama flujo magnético "ϕ" al número total de líneas magnéticas que atraviesan perpendicularmente una sección "S" determinada.

$$\phi = B \cdot S$$



Si el plano atravesado forma un ángulo "α" con las líneas magnéticas, el valor del flujo es:

$$\phi = B \cdot S \cos \alpha$$



DENSIDAD MAGNÉTICA "B"

Está dada por el número de líneas magnéticas que atraviesan una unidad de área.

$$B = \frac{\phi}{S}$$

NOTA.-

Convencionalmente la intensidad de flujo magnético y la densidad de flujo magnético son iguales.

ϕ = flujo magnético en weber "Wb"

1 Wb = 1T . m^2.

B = densidad del flujo magnético, en T/m^2.

S = área en m^2.

B) ELECTROMAGNETISMO

Es el estudio de la relación que hay entre la corriente eléctrica y el magnetismo.

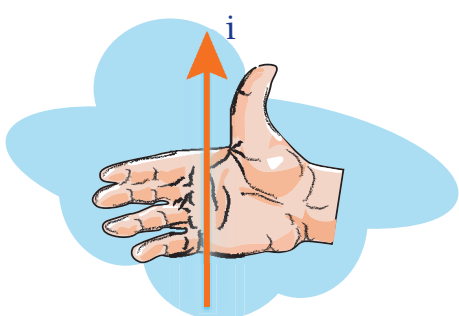
EFECTO OERSTED

"Siempre que por un conductor pasa corriente eléctrica, alrededor suyo se crea un campo magnético cuyas líneas de fuerza la envuelven, su sentido u orientación depende de la dirección de la corriente".

Al campo magnético creado por la corriente que circula se le llama campo magnético inducido.

REGLA DE LA MANO DERECHA (de Ampere)

Poniendo la palma de la mano estirada sobre el conductor, con el pulgar apuntando el sentido de la corriente, los demás dedos indican hacia donde apuntan las líneas de fuerza del campo magnético.



LEY DE BIOY Y SAVART

"La intensidad magnética inducida en un punto cercano a un conductor recto y largo, por donde circula corriente eléctrica, es directamente proporcional a la intensidad de la corriente e inversamente proporcional a la distancia del punto considerado al conductor".

$$B = \frac{\mu_O}{2\pi} \cdot \frac{i}{R}$$

B = intensidad del campo, en teslas "T".

i = intensidad de la corriente eléctrica, en amperes "A".

R = distancia del punto en el campo al conductor en "m".

K_M = constante magnética.

$$= 10^{-7} \frac{N \cdot m^2}{(A \cdot m)^2}$$

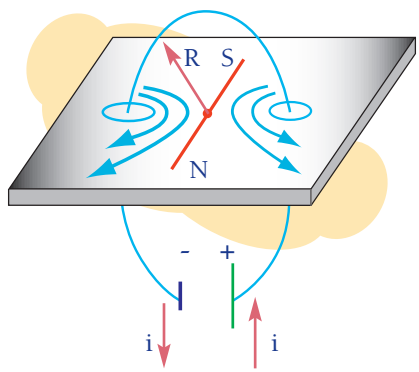
INTENSIDAD DE CAMPO CREADA POR UN CONDUCTOR CIRCULAR

a) En el centro:

$$B_c = \frac{\mu_O}{2} \cdot \frac{i}{R}$$

b) En un punto del eje:

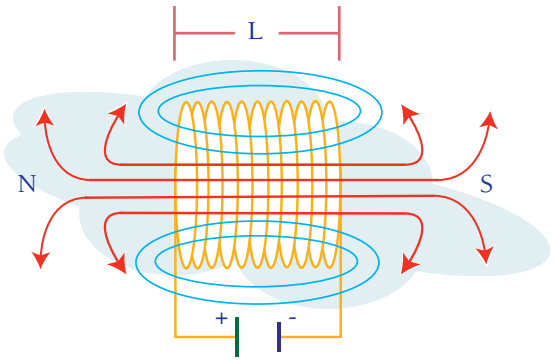
$$B_p = \frac{\mu_O}{2} \cdot \frac{iR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



LEY DE LA CIRCULACIÓN DE AMPERE

INTENSIDAD DE CAMPO EN EL INTERIOR DE UN SOLENOIDE:

Solenoide es un alambre enrollado, por donde circula la corriente, y que tienen la forma de un resorte.



Es un espiral de un alambre conductor de corriente eléctrica.

$$B = \mu_O \frac{N \cdot i}{L}$$

o:

$$B = \mu_O \cdot n \cdot i$$

B = intensidad del campo magnético, en teslas "T".

N = números de espiras.

i = intensidad de la corriente, en "A".

L = longitud del solenoide, en "m".

μ_0 = permeabilidad del espacio libre .

$= 4 \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$

Si: $\frac{N}{L} = n$, se tiene la segunda fórmula

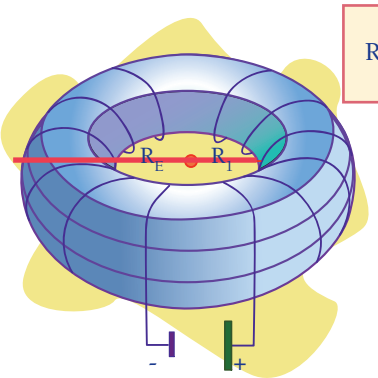
BOBINA, SOLENOIDE ANULAR O TOROIDAL DE ROWLAND

Cuando se junta los extremos de un solenoide, arqueándolo, para hacer una corona o anillo, ocurre que:

1) En el extremo, el campo magnético es cero.
2) En el interior, el valor de "H" es igual en cualquier punto.
3) El radio para el cálculo es el radio medio.

INTENSIDAD DEL CAMPO EN EL INTERIOR DE UN TOROIDE

$$R_a = \frac{R_1 + R_E}{2}$$



$$B = \mu_O \cdot \frac{i}{2\pi Ra} \cdot N$$

o:

$$B = 2\, K_M \cdot \frac{i}{R_a} \cdot N$$

FLUJO "ϕ" A TRAVÉS DE UN SOLENOIDE: (Cuando el núcleo es aire)

$$\phi = \mu_O \cdot \frac{N}{L} \cdot i$$

FLUJO "ϕ" A TRAVÉS DE UN SOLENOIDE: (Cuando el núcleo no es aire)

$$\phi = 4\, K_M \cdot \mu_r \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S$$

o:

$$\phi = \mu_O \cdot \mu_r \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S$$

o:

$$\phi = \mu \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S$$

ϕ = flujo, en webers (1 Wb = 1 T . m^2)

i = intensidad de corriente, en amperios "A".

$n = \frac{N}{L}$, número de espiras por unidad de longitud (# espiras/m).

S = área circular de la bobina, en m^2.

μ = permeabilidad magnética del material.

μ_O = permeabilidad magnética del espacio libre o vacío.

$$K_M = \frac{\mu_O}{4\pi}$$

PERMEABILIDAD MAGNÉTICA RELATIVA "μ_r"

$$\mu_O = \frac{B_N}{B}$$

o:

$$\mu_O = \frac{\phi_m}{\phi}$$

o:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_O}$$

μ_r = permeabilidad relativa de una material.

ϕ_m = flujo magnético en un material.

ϕ = flujo magnético en el espacio libre o vacío.

DENSIDAD DEL FLUJO INDUCIDO "B" A TRAVÉS DEL NÚCLEO

$$B = \frac{\phi}{S}$$

B = densidad magnética de flujo inducido, en teslas "T".

ϕ = flujo magnético, en webers "Wb".

S = sección del solenoide, en m^2.

NOTA:

La densidad magnética con la intensidad magnética o inducción magnética se igualan (es el mismo concepto).

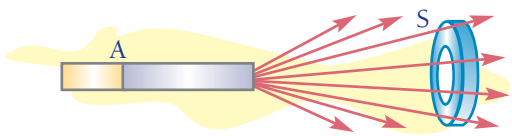
EFECTO FARADAY

Es un efecto contrario al de Oersted, es decir que el magnetismo produce corriente eléctrica.

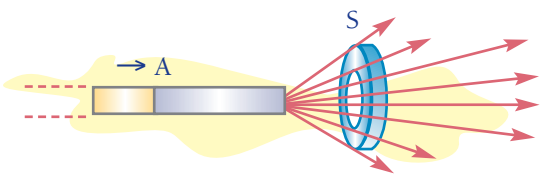
Cuando se acerca y se aleja un imán a un solenoide, se crea en el solenoide una corriente que Faraday la llamó "corriente inducida".

Sea un imán "A" con sus líneas de fuerza y un solenoide "S":

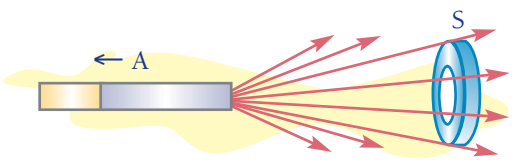
1) Si el imán no se mueve, el número de líneas que atraviesa el solenoide no varía. No hay corriente inducida.



2) Si el imán se acerca, el número de líneas que atraviesa el solenoide aumenta. Hay corriente inducida.



3) Si el imán se aleja, el número de líneas que atraviesa el solenoide disminuye. Hay corriente de sentido contrario al anterior.



4) Si el imán se acerca y se aleja repetida y rápidamente, el número de líneas que atraviesa el solenoide también aumenta rápidamente y como consecuencia la intensidad de la corriente inducida aumenta. La corriente que circula por el solenoide es CORRIENTE ALTERNA.

Sea ϕ_1 el flujo inicial y sea ϕ_2 el flujo final de mayor valor, la variación del flujo es:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

La velocidad o rapidez de variación del flujo será:

$$v = \frac{\Delta\phi}{t}$$

LEY DE FARADAY

"La fuerza electromotriz inducida en un solenoide es directamente proporcional, pero de signo contrario, al número de espiras del solenoide y a la rapidez con que cambia el flujo magnético que encierra".

$$F = -\frac{N \cdot \Delta\phi}{\Delta t}$$

F = fuerza electromotriz, en voltios "V".

N = número de espiras.

$\Delta\phi$ = variación del flujo magnético, en "Wb".

Δt = período de tiempo en "s".

ÓPTICA

Es el estudio de la luz, así como de todos los fenómenos relacionados con ella.

Según Newton, la luz es una emisión corpuscular de los cuerpos.

Según Huygens, la luz es un fenómeno ondulatorio. Maxwell sostenía que la luz está constituída por ondas transversales de naturaleza electromagnética.

Plank postula la teoría de los "quanta". Según esta teoría la energía de un haz luminoso está concentrada en paquetes constituyendo corpúsculos energéticos o fotones.

Actualmente se cree en la doble naturaleza de la luz: corpuscular y ondulatoria.

VELOCIDAD DE LA LUZ

300 000 km/s

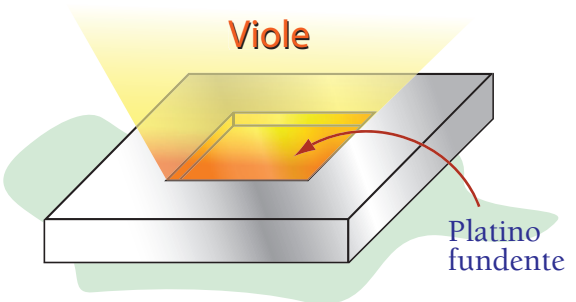
UNIDAD DE INTENSIDAD DE LA LUZ

"Viole es la intensidad de la luz emitida por una plancha de platino de $1 cm^2$ en estado fundente".

$$1 \text{ candela} = \frac{1}{20} \text{ Viole}$$

$$1 \text{ bujía} = \frac{1}{20} \text{ Viole}$$

$\therefore$ 1 cad = 1 bujía



A) ILUMINACIÓN

Es la incidencia de los rayos luminosos sobre una superficie.

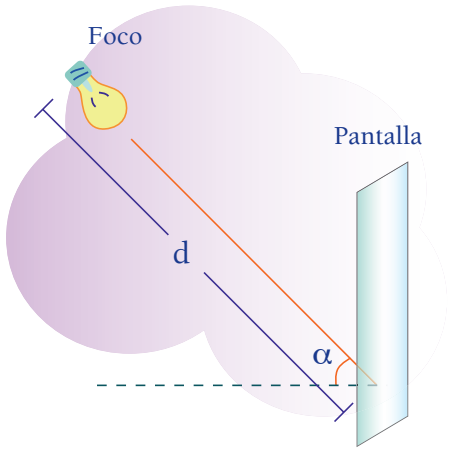
UNIDAD DE ILUMINACIÓN "E"

$$E = \frac{I \cos \alpha}{d^2} \qquad 1 \text{ lux} = \frac{1 \text{ bujía}}{1 \text{ cm}^2}$$

E = iluminación, en lux.

I = intensidad luminosa, en bujías.

d = distancia del foco a la zona iluminada, en cm



FLUJO LUMINOSO "f"

Es la intensidad de carga luminosa recibida por una superficie.

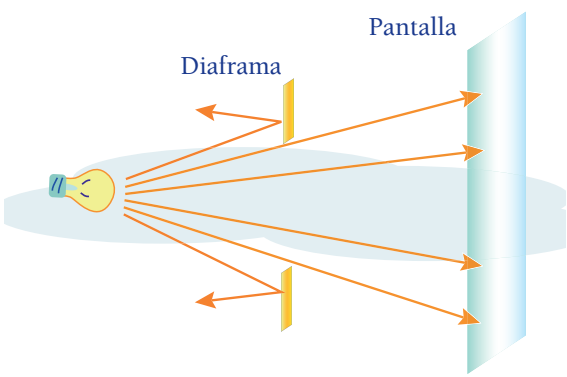
$$f = E \cdot A$$

f = flujo luminoso, en lúmenes.

E = iluminación, en lux.

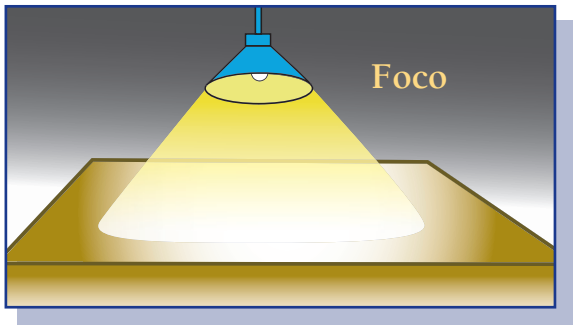
A = área iluminada, en m^2.

$$1 \text{ lumen} = 1 \text{ lux} \cdot 1 \text{ m}^2$$



INTENSIDAD LUMINOSA "I"

Es la cantidad de flujo emitido por un manantial por cada unidad de ángulo sólido.



$$I = \frac{f}{\omega}$$

I = intensidad luminosa, en bujías.

f = flujo luminoso, en lúmenes.

ω = ángulo sólido, en estereoradianes o radianes.

FLUJO TOTAL DE INTENSIDAD "f_T"

$$f_T = 4\pi \cdot I$$

f_T = flujo total de iluminación, en lúmenes.

π = en radianes.

I = intensidad luminosa, en bujías.

UNIDADES FOTOMÉTRICAS S.I.
(S.I. = Systeme International d´Unites)

Propiedad que se mide	Unidad S.I.	Símbolo
Intensidad luminosa (I)	Candela	cd
Flujo luminoso (ϕ)	Lumen	lm
Iluminación (E)	Lux ($1 m/m^2$)	lx
Luminancia (L)	cd/m^2	cd/m^2

REFLEXIÓN DE LA LUZ

Es el rebote que experimentan los rayos luminosos al incidir sobre una superficie, cambiando de dirección. La superficie puede ser rugosa o pulimentada, dando origen reflexión "difusa" y reflexión "regular", respectivamente.

LEYES DE LA REFLEXIÓN REGULAR

"El ángulo "i" de incidencia es igual al ángulo "r" de reflexión".

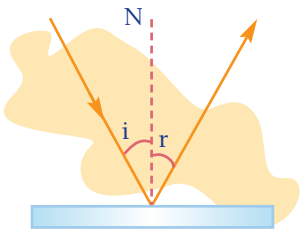
"El rayo de incidencia, el rayo de reflexión y la normal están en un mismo plano perpendicular al plano de incidencia".

ÁNGULO DE INCIDENCIA "i" y ÁNGULO DE REFLEXIÓN "r"

NORMAL "N" es una recta perpendicular al plano en el punto de incidencia del rayo luminoso.

$\hat{i}$ = ∢ de incidencia

$\hat{r}$ = ∢ de reflexión



ESPEJOS

Son superficies pulimentadas que sirven para producir reflexión regular y producir imágenes. Los espejos pueden ser planos o esféricos.

ESPEJOS PLANOS

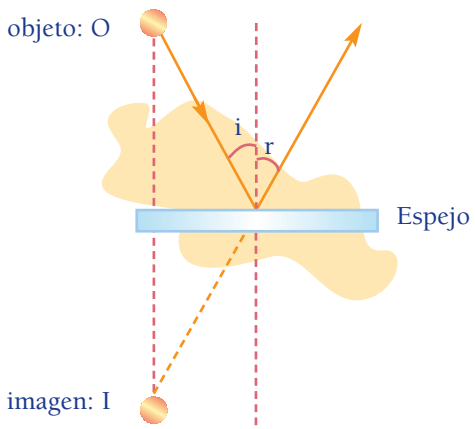
Son superficies pulimentadas planas que al incidir los rayos luminosos proporcionan una imagen de las siguientes características:

a) Derecha.

b) Virtual, es decir detrás del espejo.

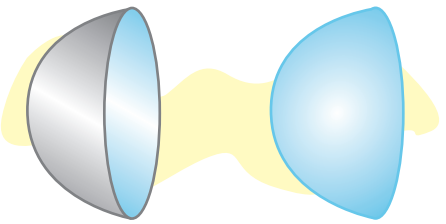
d) Del mismo tamaño del objeto.

e) Simétrico con respecto al espejo.



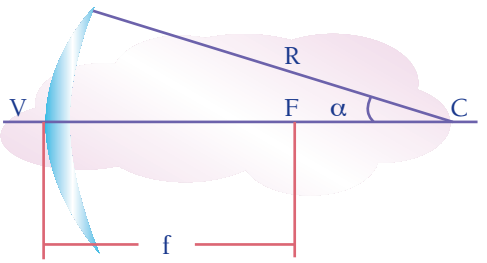
ESPEJOS ESFÉRICOS

Son casquetes esféricos pulidos. Si está pulido por dentro el espejo es cóncavo o convergente; si está pulido por fuera el espejo es convexo o divergente.



Cóncavo convergente — Convexo o divergente

ELEMENTOS DE UN ESPEJO ESFÉRICO



1) CENTRO DE CURVATURA, es el centro "C" de la esfera.

2) POLO DEL CASQUETE, es el vértice "V".

3) EJE PRINCIPAL, es la recta que une el vértice "V" y el centro de curvatura "C".

4) ABERTURA, es el ángulo "α" formado por el eje principal y el radio que pasa por el borde del espejo.Normalmente los espejos esféricos no tienen más de 10º de abertura, lo que significa que su radio siempre es muy grande.

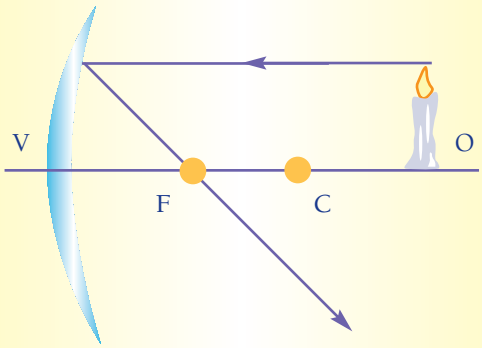
5) FOCO PRINCIPAL, es el punto "F" del eje principal por donde pasan los rayos reflejados del espejo.

6) DISTANCIA FOCAL, es la distancia "f" del foco principal al vértice "V" del espejo, su valor: f = R/2.

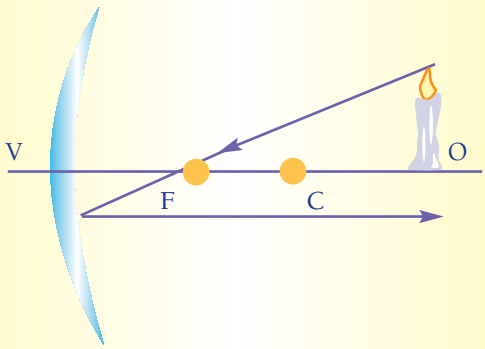
7) EJE SECUNDARIO, es cualquier eje que no sea el principal y que pasa por el centro "C" del espejo.

RAYOS PRINCIPALES

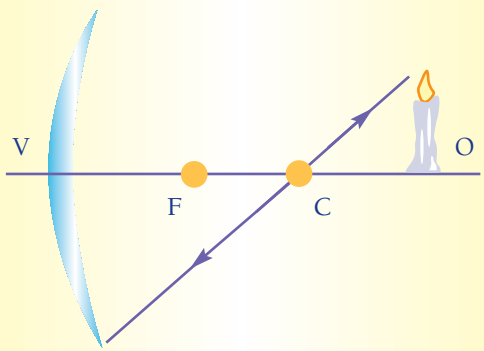
1. Todo rayo paralelo al eje principal, se refleja pasando por el foco “F”.



2. Todo rayo que pasa por el foco “F”, se refleja paralelo al eje principal.



3. Todo rayo que pasa por el centro de curvatura “C”, se refleja sobre sí mismo.



POSICIÓN DEL OBJETO Y LA IMAGEN EN UN ESPEJO CONCÁVO

Cuando el objeto está más allá del centro de curvatura.

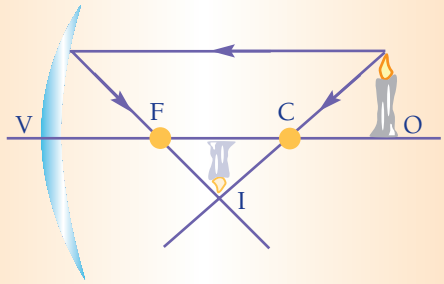


Imagen:

Real Invertida de menor tamaño

El objeto está sobre el centro de curvatura:

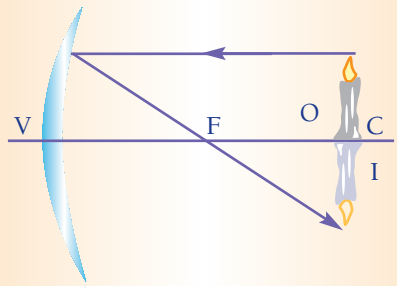


Imagen:

Real Invertida del mismo tamaño del objeto

El objeto esté entre el foco y el centro de curvatura:

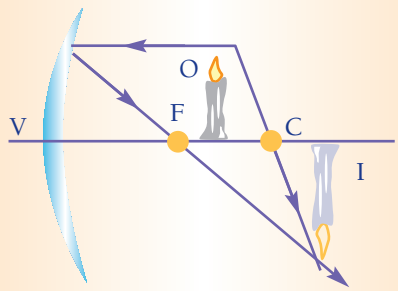


Imagen:

Real Invertida de mayor tamaño

El objeto está sobre el foco:

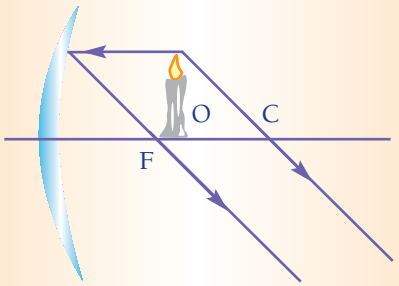


Imagen:

Los rayos reflejados no se cortan, luego no hay imagen, o la imagen está en el infinito.

El objeto está entre el foco y el vértice

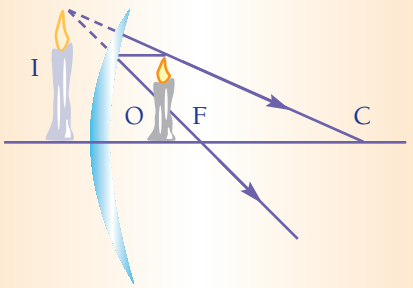


Imagen:

Virtual, porque se cortan en la prolongación del rayo reflejado.

Derecha de mayor tamaño que el objeto.

Cuando se trata de punto que está en el eje principal:

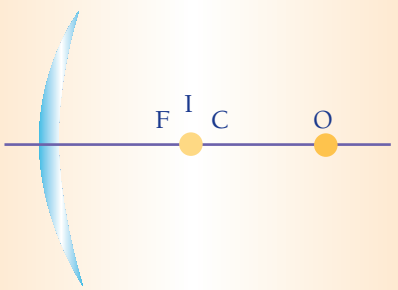


Imagen:

En el eje principal.

IMAGEN DE UN ESPEJO CÓNCAVO

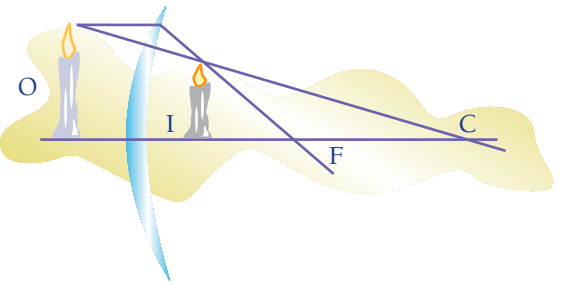


Imagen:

Virtual derecha más chica que el objeto.

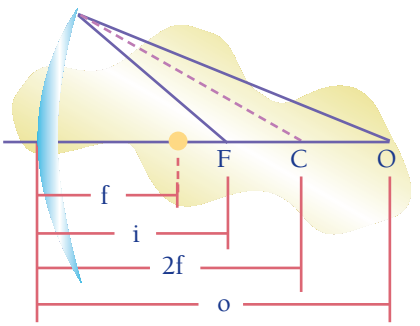
POSICIÓN DE LA IMAGEN (Fórmula de Descartes):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

f = distancia del foco al vértice.

i = distancia de la imagen al vértice.

o = distancia del objeto al vértice.



NOTA:

1) Esta fórmula es válida para espejos cóncavos y convexos.

2) Signos de las imágenes: imagen real + i, imagen virtual: -i.

3) Signos de las magnitudes:

Para espejos cóncavos:

R y F son positivos (+)

Para espejos convexos:

R y F son negativos (-)

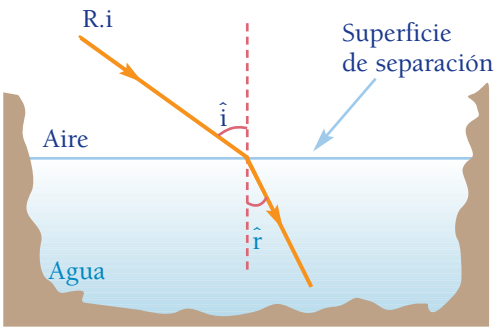
TAMAÑO DE LA IMAGEN "I"
("O" tamaño del objeto)

$$I = O\,\frac{i}{o}$$

C) REFRACCIÓN DE LA LUZ

Es el fenómeno físico que consiste en el cambió de dirección que experimenta un rayo luminosos al incidir en la superficie de separación entre dos medios de distinta densidad,debido a que el rayo luminoso cambia su velocidad.

La refracción se produce cuando el rayo luminoso incide en forma oblícua a la superficie de separación entre dos medios distintos.



ÍNDICES DE REFRACCIÓN

ÍNDICE DE REfRACCIÓN ABSOLUTO "n"

$$n = \frac{C}{V}$$

n = índice de refracción.

C = velocidad de la luz en el vacío 300 000 km/s

V = velocidad de la luz en el otro medio.

ÍNDICE DE REFRACCIÓN RELATIVO "n_{A-B}"

$$n_{A-B} = \frac{V_A}{V_B}$$

V_A = velocidad de la luz en el medio A.

V_B = velocidad de la luz en el medio B.

LEYES DE LA REFRACCIÓN

1ra. LEY: Es cualitativa:

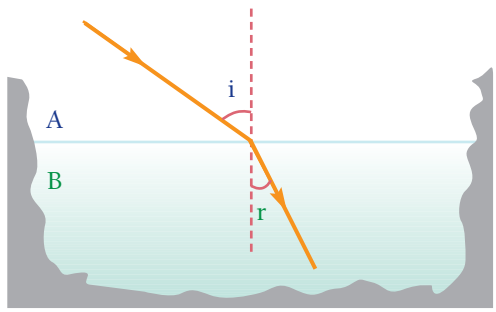
"El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en un mismo plano, llamado plano de incidencia".

2da. LEY: Es cuantitativa:

"La relación del seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante e igual al índice de refracción".

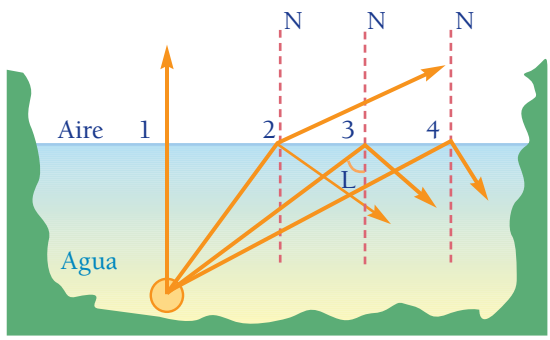
$$\frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = n_{A-B}$$

n_{A-B} = índice de refracción del medio B con respecto al medio A.



ÁNGULO LÍMITE Y REFLEXIÓN TOTAL : "L"

Cuando la luz va del agua al aire:



- El rayo 1 pasa de frente, no refracta ni refleja.
- El rayo 2 refracta y refleja.
- El rayo 3 refracta a 90º y refleja.
- El rayo 4 todo refleja porque el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite "L".

$$\text{Sen}L = \frac{1}{n}$$

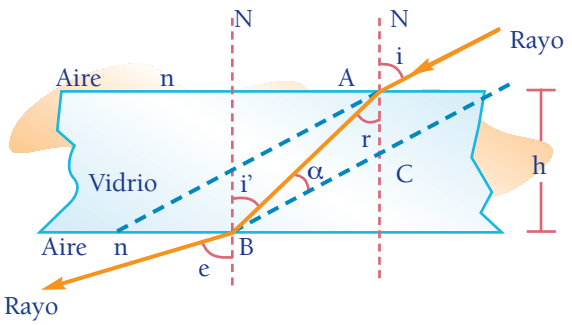
n = índice de refracción del agua con respecto al aire.

L = ángulo límite de refracción.

LÁMINA DE CARAS PARALELAS. DESPLAZAMIENTO "d" DEL RAYO

Sea por ejemplo el vidrio de una ventana de espesor "h", a través del cual pasa un rayo de luz.

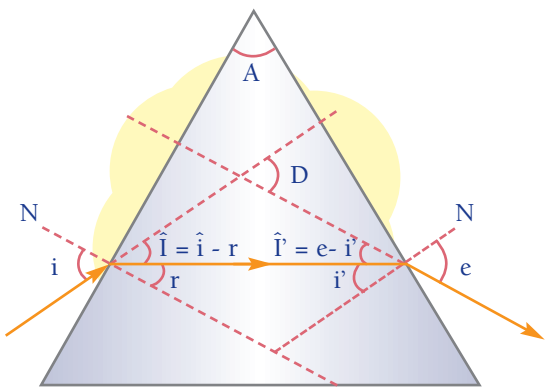
$$d = \frac{h}{\cos \hat{r}} \cdot \text{sen}\,(\hat{i} - \hat{r})$$



PRISMA ÓPTICO. CALCULO "D" DE DESVIACIÓN

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{\text{sen}\,\hat{e}}{\text{sen}\,\hat{i}'} = n$$

$$D = \hat{i} + \hat{e} - \hat{A}$$



DESVIACIÓN MÍNIMA DE PRISMA:

Sucede cuando $\hat{e} = \hat{i}$

$$\therefore \quad D_m = 2i - A$$

ÍNDICE DE REFRACCIÓN CON DESVIACIÓN MÍNIMA:

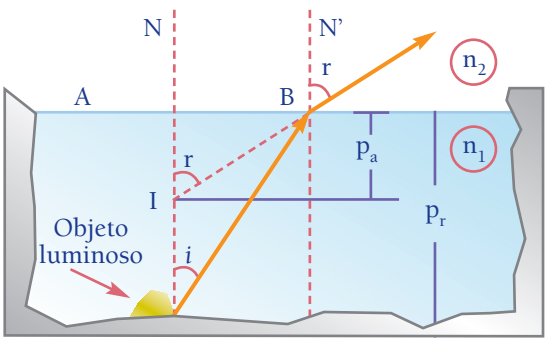
$$n = \frac{\text{sen}\,\dfrac{D_m + A}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{A}{2}}$$

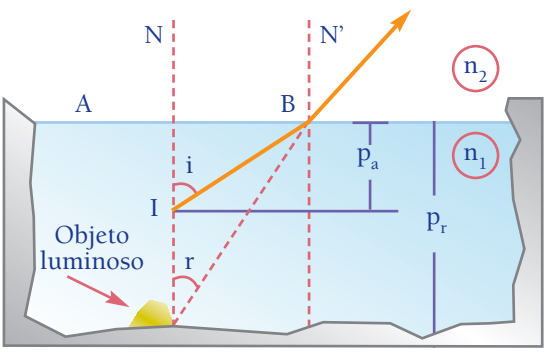
IMÁGENES POR REFRACCIÓN

Cuando un cuerpo está sumergido

Determinación de profundiad aparente "p_a" o profundidad aparente "pa" o profundidad real "p_r".

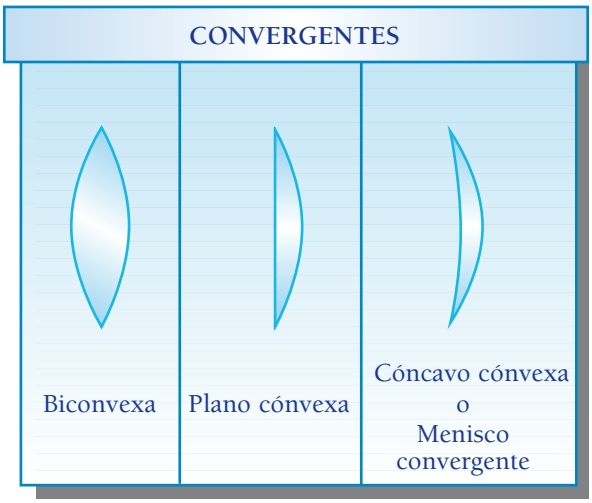
$$\frac{P_a}{P_r} = \frac{n_2}{n_1}$$

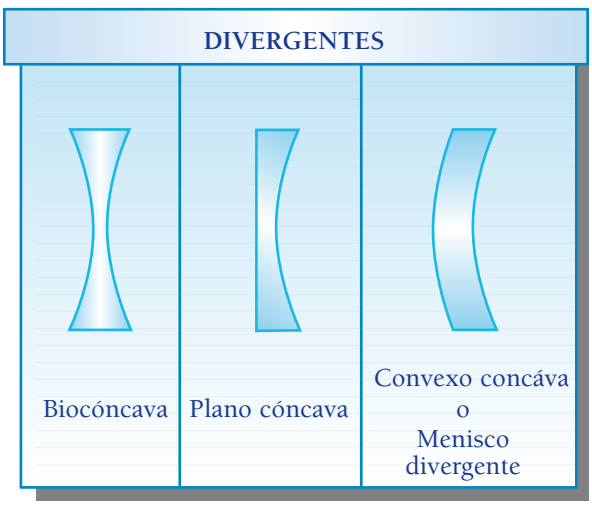




LENTES

Son cuerpos refractantes, refrigerantes, limitados por dos superficies o ambas esféricas, o una esférica y la otra plana.





ELEMENTOS DE LAS LENTES

1) Eje principal "CC_1"

2) Centro de curvatura "CC" y C_1"

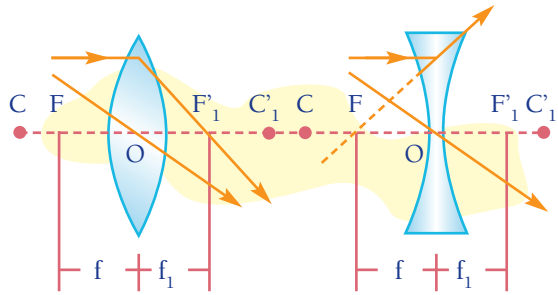
3) Centro óptico

4) Foco principal "F"

5) Distancia focal "OF" = f = R/2

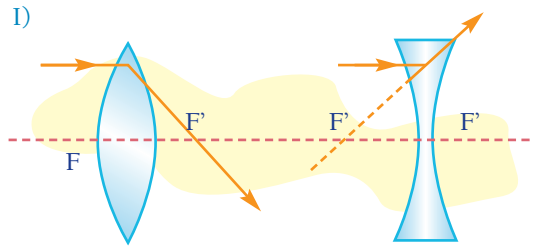
CF = FO

y $OF'_1 = F'_1 C'_1$



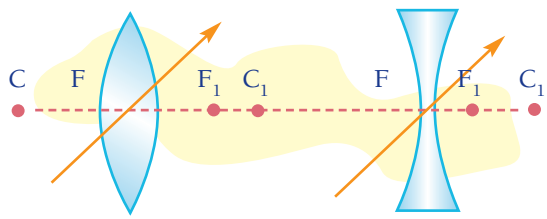
RAYOS PRINCIPALES EN LAS LENTES CONVERGENTES Y DIVERGENTES

I)



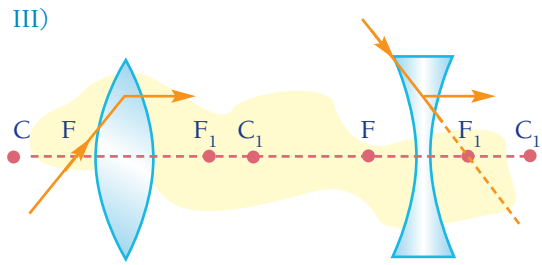
Todo rayo paralelo al eje principal, en una lente convergente, se refracta pasando por el foco. Si la lente es divergente, la prolongación del rayo refractado es la que pasa por el foco.

II)



Todo rayo que pasa por el centro óptico no se desvía, sea la lente cóncava o convergente.

III)



Todo rayo que pasa por el foco de una lente convergente, que incide en una lente, se refracta paralelo al eje principal. Todo rayo que incide en una lente divergente, cuya prolongación pasa por el foco se refracta paralelo al eje principal.

CONSTRUCCIÓN Y POSICIÓN DE IMÁGENES DE LENTES CONVERGENTES

1) Objeto más allá del centro de curvatura, es decir: $p > 2f$

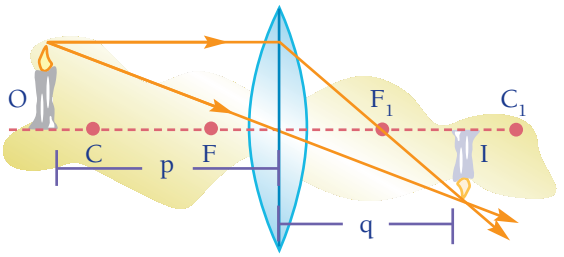


Imagen:

Real invertida de menor tamaño que el objeto.

2) Objeto en el centro de curvatura; es decir: $p = 2f$

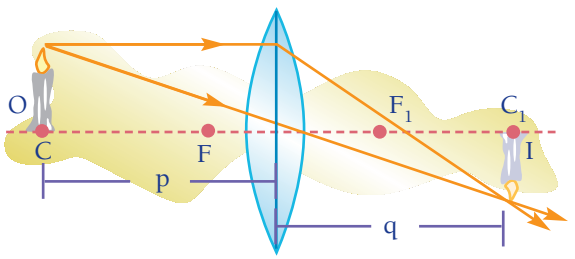


Imagen:

Real invertida de igual tamaño que el objeto.

3) Objeto entre el centro de curvatura y el foco: $2f > p > f$

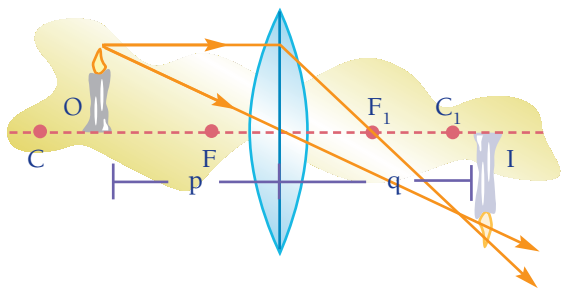


Imagen:

Real invertida de mayor tamaño que el objeto.

4) Objeto en el foco principal: $p = f$

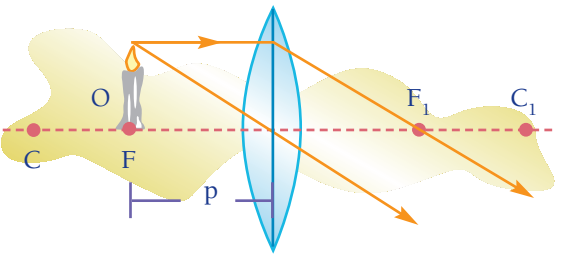


Imagen:

No hay imagen, o la imagen está en el infinito.

5) Objeto entre el foco principal y el centro óptico: $f > p$

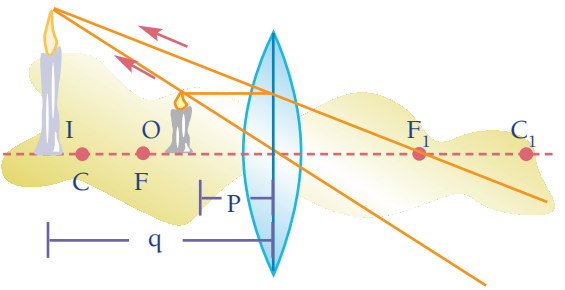


Imagen:

Virtual derecha de mayor tamaño que el objeto.

FÓRMULA DE DESCARTES PARA LAS LENTES

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

f = distancia focal = R/2.

q = distancia de la imagen a la lente.

p = distancia del objeto a la lente.

CONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN DE UNA LENTE DIVERGENTE

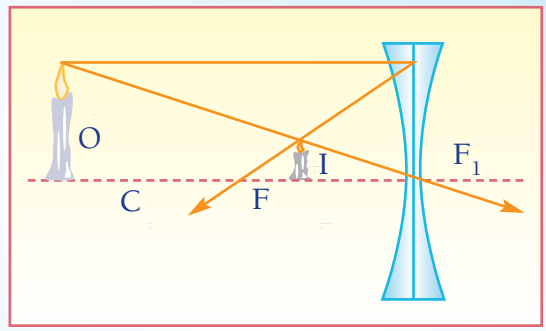
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

NOTA:

En el caso de las lentes divergentes, téngase presente que:

a) Siempre: $f < 0$, es decir negativo.

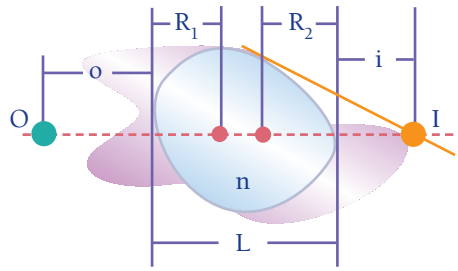
b) La distancia "p" del objeto a la lente, siempre es de signo contrario al de la distancia "q".



POTENCIA DE UNA LENTE

$$P = \frac{1}{f}$$

Unidades SI: Dioptría $= \frac{1}{\text{metro}}$



AUMENTO DE LA LENTE

El aumento tiene signo negativo por estar la imagen invertida.

$$A = -\frac{q}{p}$$

POTENCIA DE LENTES DE CONTACTO

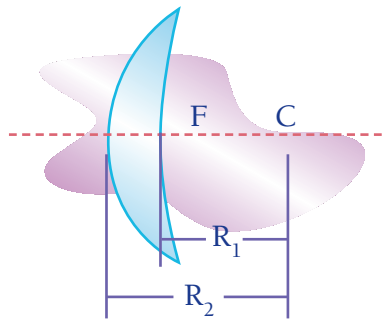
$$P = P_1 + P_2$$

$$\therefore \quad P = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

LENTES GRUESAS DE DOS CARAS DE CURVATURA

"ECUACIÓN DEL FABRICANTE DE LENTES", Potencia:

$$P = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$



QUÍMICA

DEFINICIONES

QUÍMICA

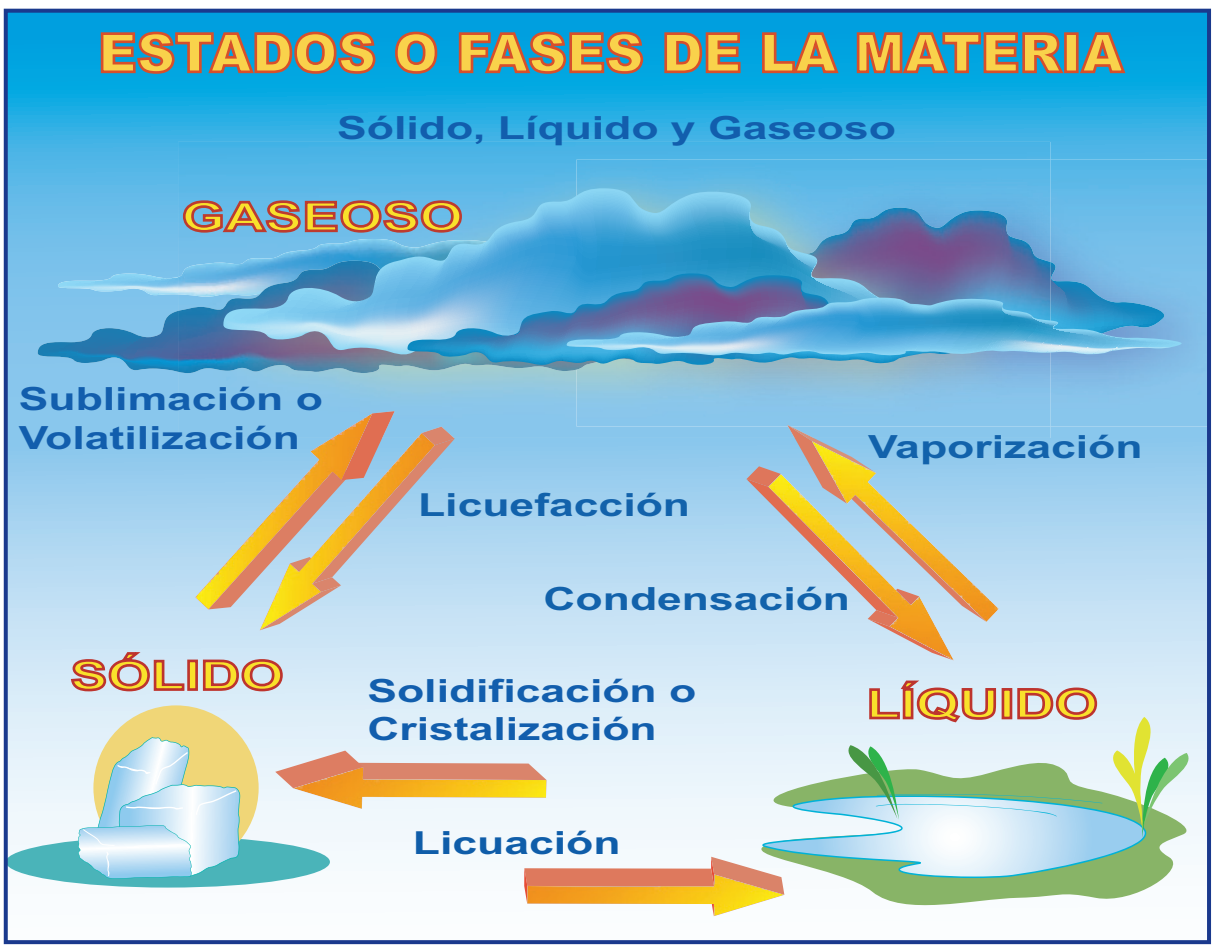
Es la ciencia que estudia las modificaciones o transformaciones que experimenta la molécula. Referidas también como transformación íntima de la materia.

MASA

Es el contenido material y energético que tiene un cuerpo.

MATERIA

Es todo lo ponderable (pesable) e indestructible, que ocupa un lugar en el espacio.



CUERPO

Es una porción limitada de materia.

SUSTANCIA

Es la parte constitutiva del cuerpo, en la que toda porción de ella posee las mismas propiedades específicas.

SISTEMA

Es el conjunto de dos o más sustancias o cuerpos.

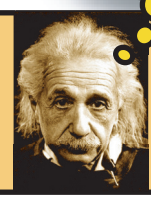
FASE

Es cada porción homogénea de una mezcla.

ENERGÍA

Es la capacidad de un cuerpo para realizar un trabajo. La relación cuantitativa entre la masa y la energía dada por Einstein es:

$$E = mc^2$$



E = energía
m = masa
c = velocidad d la luz

UNIDADES DE MEDIDA

UNIDADES DE LONGITUD

SISTEMA INTERNACIONAL SI

La unidad de longitud es el metro "m"

1 kilómetro (km)	=	1 000 metros	(m)
1 metro (m)	=	100 centim.	(cm)
1 centímetro (cm)	=	10 milím.	(mm)
1 milímetro (mm)	=	1 000 000 micras	(μ)
1 micra (μ)	=	10 Amstron	(A°)
1 metro (m)	=	10^{10} Amstron	
kilo	=	mil	
centi	=	centésima	
mili	=	milésima	
micro	=	millonésima	

SISTEMA INGLÉS

1 milla (mill)	=	1760 yardas	(yd)
1 Yarda (yd)	=	3 pies	(ft)
1 Pie (ft)	=	12 pulgadas	(ps)

UNIDADES DE SUPERFICIE

SISTEMA INTERNACIONAL "SI"

La unidad SI de superficie es el "m^2"

1 m^2	= 100 dm^2
1 dm^2	= 100 cm^2
1 cm^2	= 100 mm^2

SISTEMA INGLÉS

1 yd^2	= 9 pie^2
1 pie^2	= 144 $pulg^2$

UNIDADES DE VOLUMEN

La unidad SI de volumen es el "m^3"

SISTEMA INTERNACIONAL "SI"

1 m^3	= 1 000 dm^3 o litros
1 L	= 1 000 cm^3 o cc o mL
1 cm^3	= 1 000 mm^3

SISTEMA INGLÉS:

1 galón	= 4 cuartos = 3,785 L
1 cuarto	= 2 pintas
1 pinta	= 16 onzas líquidas

UNIDADES DE MASA

La unidad SI de masa es el KILOGRAMO "kg"

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL:

1 Tonelada Métrica	(Tm)	= 1 000 kg
1 kilograma	(kg)	= 1 000 g
1 gramo	(gr)	= 1 000 mg
1 miligramo	(mg)	= 1000 μg

SISTEMA INGLÉS:

1 libra (lib)	= 16 onzas (oz)
1 tonelada corta	= 2 000 libras

UNIDADES DE TIEMPO

La unidad SI de tiempo es el segundo

1 siglo	= 100 años
1 año	= 12 meses
1 mes	= 30 días
1 día	= 24 horas
1 hora	= 60 minutos
1 minuto	= 60 segundos

EQUIVALENCIAS DE UNIDADES SI E INGLESAS

DE LONGITUD

1 km	= 0,539 mill. Marítimas
1 m	= 1,094 yd.
1 m	= 3,281 pies
1 m	= 39,372 pulg.
1 mill. Marina	= 1 852 m
1 yd	= 0,914 m
1 pie	= 0,3048 m
1 pulgada	= 0,0254 m

DE SUPERFICIE

1 m^2	= 1,196 yd^2
1 m^2	= 10,76 $pies^2$
1 m^2	= 1 550 $pulg^2$
1 yd^2	= 8 361 . 10^{-4} m^2
1 pie^2	= 929 . 10^{-4} m^2
1 $pulg^2$	= 6,452 . 10^{-4} m^2

DE VOLUMEN

1 m^3	= 1,309 yd^3
1 dm^3	= 0,035 pie^3
1 cm^3	= 0,061 $pulg^3$
1 yd^3	= 764,6 . 10^{-3} m^3
1 pie^3	= 28,32 . 10^{-3} m^3
1 $pulg^3$	= 16,39 . 10^{-3} m^3

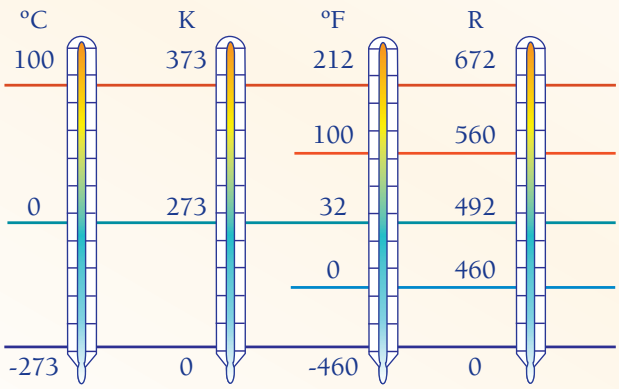
DE MASA

1 kg	= 2,202 lib.
1 kg	= 35,232 onz.
1 lib	= 0,454 kg
1 lib	= 454 g
1 onz	= 28,38 g

Unidad de peso SI : newton « N »

$$1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

UNIDADES DE TEMPERATURA



Ebullición del Agua

Temperatura promedio del Hombre

Fusión del Hielo

Temperatura de mezcla de sales con hielo

Cero absoluto

Las unidades de medida de temperatura son:

- **grado celcius ºC**
- **kelvin K**
- **rankine R**
- **grado farenheit º F**

EQUIVALENCIA DE TODAS LAS ESCALAS

$$\frac{ºC}{5} = \frac{ºF - 32}{9} = \frac{K - 273}{5} = \frac{R - 492}{9}$$

Ejemplo: Transformar -60º F a K

$$\frac{ºF - 32}{9} = \frac{K - 273}{5}$$

de donde:

$$K = \frac{5(ºF - 32)}{9} + 273$$

sustituyendo el valor de ºF:

$$K = \frac{5(-60 - 32)}{9} + 273 = 221{,}9K$$

DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

DENSIDAD ABSOLUTA O DENSIDAD

Es la masa de una sustancia presente en una unidad de volumen. La unidad SI de densidad es kg/m^3.

Ejemplo:

$\delta = 8 \cdot 10^3\ kg/m^3$

$\delta = 8\ g/cm^3$

$\delta = 62{,}4\ lib/pie^3$ (Sist. Inglés)

Se calcula así:

$$\delta = \frac{M}{V}$$

δ = densidad absoluta

M = masa del cuerpo

V = volumen que ocupa

DENSIDAD RELATIVA

Es el resultado de la comparación, por división, de dos densidades absolutas:

$$\delta_{a/b} = \frac{\delta a}{\delta b}$$

δ_a = densidad de la sustancia "a"

δ_b = densidad de la sustancia "b"

También es el resultado de la comparación, por división, de las masas de volúmenes iguales.

$$\delta_{a/b} = \frac{Ma}{Mb}$$

Ma = masa de "a"

Mb = masa de "b" de igual volumen que "Ma"

Tratandose **sólo de gases** y únicamente de gases, la densidad relativa es el resultado de comparar, por división, los pesos moleculares.

$$\delta_{g1/g2} = \frac{Pmg_1}{Pmg_2}$$

Pm g_1 = peso molecular de gas 1

Pm g_2 = peso molecular del gas 2

PESO ESPECÍFICO (ρ_e)

Es el resultado de la comparación, por división, del peso de un sólido o líquido con su volumen.

$$\rho_e = \frac{\text{Peso del cuerpo}}{\text{Volumen del cuerpo}}$$

GRAVEDAD ESPECÍFICA (G.e ó Sp - gr)

Para sólidos y líquidos:

$$Sp - gr = \frac{\text{Peso del cuerpo}}{\text{Peso de un volumen igual de agua}}$$

Para gases:

$$Sp - gr = \frac{\text{Peso del gas}}{\text{Peso de un volumen igual de aire}}$$

DENSIDAD DE LA MEZCLA

Es el promedio ponderado de las densidades de las sustancias que intervienen en la mezcla, se calcula así:

$$m = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots.}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots} \qquad \text{(I)}$$

Donde M_1, M_2, etc., son las masas de los cuerpos que entran en la mezcla.

Donde V_1, V_2, etc., son los volúmenes de esos cuerpos.

Como M = V . δ, también se tiene, sustituyendo en (I):

$$m = \frac{V_1 \cdot \delta_1 + V_2 + \delta_2 + V_3 \cdot \delta_3 + \ldots}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots}$$

También, como $V = \frac{M}{\delta}$, sustituyendo En (I):

$$\delta m = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots.}{\frac{M_1}{\delta_1} + \frac{M_2}{\delta_2} + \frac{M_3}{\delta_3} + \ldots.}$$

RELACIÓN ENTRE DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

$$\rho = \delta \cdot g$$

PRESIONES

PRESIÓN

Efecto de la fuerza que se aplica sobre una superficie determinada. Esa fuerza puede ser instantánea (golpe) o permanente.

$$P = \frac{F}{A}$$

P = presión, en pascal "Pa"

F = fuerza, en newton, "N"

A = área sobre la que actúa la fuerza, en m^2.

La unidad SI de presión es el PASCAL "Pa":

$$1\ Pa = \frac{1N}{1\ m^2}$$

PRESIÓN HIDROSTÁTICA O PRESIÓN DE LÍQUIDOS EN REPOSO

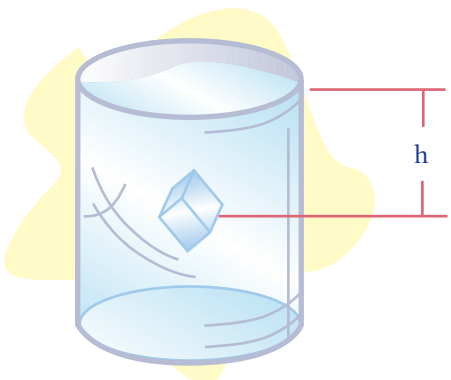
Es la presión que soporta un punto sumergido en un líquido en reposo.

$$P = h \cdot \delta$$

P = presión

h = profundidad a la que está en el líquido el punto considerado.

δ = densidad del líquido.



Ejemplo:

Un cuerpo está sumergido, en mercurio, a 0,60 cm de profundidad. La densidad del Hg es 13,6 g/cm^3, ¿Cuál es la presión que soporta el cuerpo?

$$P = h \cdot \delta = 0{,}60 \text{ cm} \cdot 13{,}6 \frac{g}{cm^2}$$

$$P = 800{,}5 \frac{N}{m^2}$$

$$P = 800{,}5 \text{ Pa}$$

PRESIÓN NEUMÁTICA O PRESIÓN DE GASES

Se debe a la colisión o golpeteo de las moléculas gaseosas entre sí y a la colisión o golpeteo de las moléculas con las paredes de recipiente que los contiene. Es de tres clases:

1.- Presión atmósferica o barométrica (Pb).-

Es la presión que ejerce la masa gaseosa que rodea la Tierra sobre todo el cuerpo que está en ella. (Presión del aire).

2.- Presión relativa o manométrica (Pm).-

Es la diferencia de presión que existe entre la presión de un gas encerrado en un recipiente y la presión atmosférica que la rodea (presión atmosférica).

3.- Presión absoluta (Pa).-

Es la presión total que soporta un gas dentro de un recipiente, tomando como referencia el vacío absoluto.

$$Pa = Pm + Pb$$

NOTAS:

1.- Cuando el recipiente de gas está abierto, la Pm es cero y la Pa = Pb.

2.- La presión a nivel del mar es la "unidad" para medir las presiones y se llama "Una atmósfera".

3.- Sus equivalencias son:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg} = 14{,}7 \text{ psi}$$

$$= 1{,}033 \text{ kg/cm}^2 = 10{,}13 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$$

$$= 10{,}13 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 10{,}33 \text{ m } H_2O = 29{,}9 \text{ pulg Hg.}$$

4.- P.s.i. son las iniciales de "pound square inch" que quiere decir en inglés "libras por pulgada cuadrada".

P.s.i.g. (pound square inch gauge) que quiere decir "libra por pulgada cuadrada manométrica"; y P.s.i.a., quiere decir "libras por pulgada cuadrada absoluta".

$$P.s.i.a. = P.s.i.g + P.s.i$$

TEORÍA ATÓMICO MOLECULAR

Hay muchas teorías que han intentado explicar y describir la arquitectura, estructura y características del átomo y de la molécula. Es decir han imaginado al átomo en formas o modelos diferentes; sin embargo, el modelo de Bohr-Sommerfeld mejorado con el aporte científico de Dirac, Jordán, Schrodinger, Pauling, Heissemberg y otros, es el modelo actual.

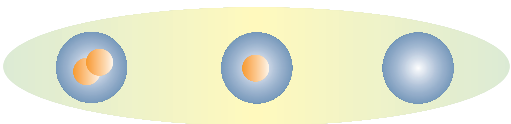
La teoría actual sostiene que "el electrón puede estar ubicado en cualquier parte del átomo, pero existe mayor probabilidad de encontrarse en su correspondiente nivel de energía".

PRINCIPALES CONCEPTOS

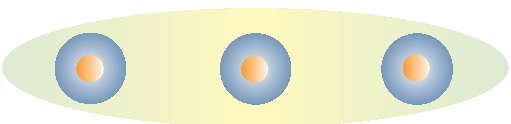
REGLA DE HUND

Los electrones tratar de ocupar el mayor número de orbitales en determinado subnivel.

Por ejemplo: si en el subnivel "p" hay por ejemplo 3 electrones, (el cual tiene 3 orbitales), los electrones no se distribuyen así:



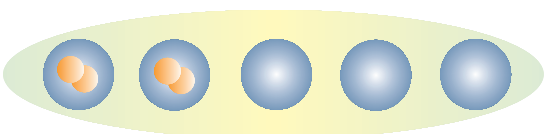
Si no de esta otra manera, guardando la máxima distribución.



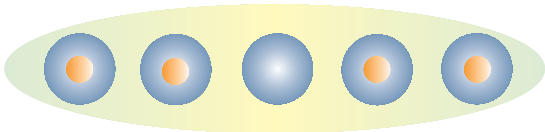
TENDENCIA A LA MÁXIMA SIMETRÍA

Los electrones de un subnivel se distribuyen en los orbitales guardando la mayor simetría.

Por ejemplo: El subnivel "d" tiene 5 orbitales, supóngase que es un átomo que tiene sólo 4 electrones en este subnivel; su distribución no es así:



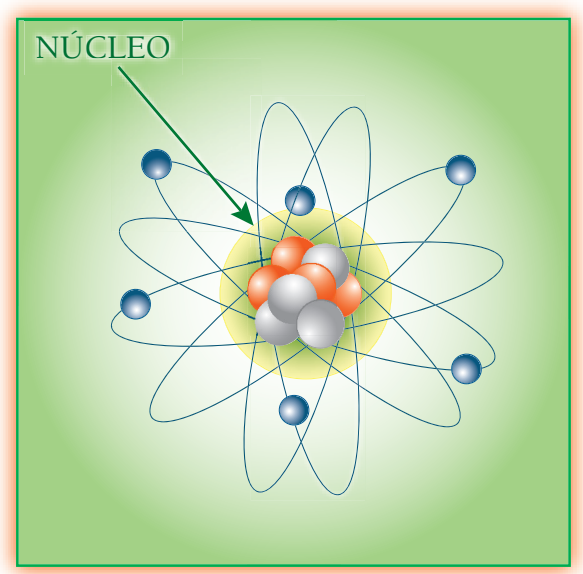
Si no de esta otra manera, guardando la máxima simetría:



El concepto actual del átomo afirma que, es un sistema energético en equilibrio, constituido por "cáscaras energéticas", configuradas por la nube de electrones que giran alrededor del núcleo.

El diámetro del núcleo, en promedio, es de 10^{-12} cm. el diámetro del átomo, en promedio, es 10^{-8} cm. La masa está prácticamente concentrada en el núcleo y varía entre $2 \cdot 10^{-22}$g y $4 \cdot 10^{-24}$g.

ESTRUCTURA PARTICULAR DEL ÁTOMO



PROTON "p"
masa: 1u.m.a. o $1{,}67252 \cdot 10^{-24}$ g ; (carga + 1)

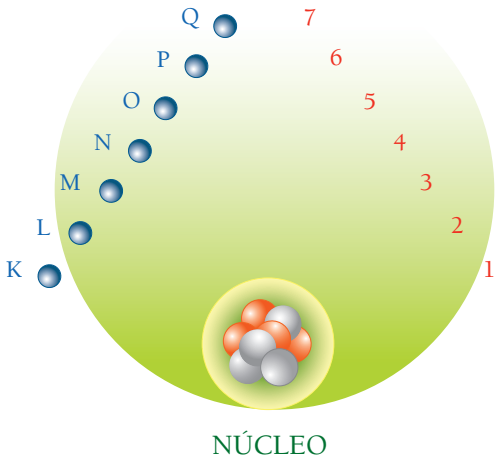
NEUTRON "n"
masa: 1u.m.a. o $1{,}67282 \cdot 10^{-24}$ g ; (carga 0)

ELECTRON "e"
masa: 1u.m.a. / 1 874 o $0{,}91091 \cdot 10^{-27}$ g ; (carga -1)

CROQUIS DE UN ÁTOMO

Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 indican los niveles, se llaman también números cuánticos principales.

Nótese que los niveles se van acercando a medida que se alejan del núcleo.



NÚCLEO

Parte central del átomo, formado por el conjunto de protones y neutrones.

ISÓTOPOS

Son elementos químicamente iguales por tener el mismo número de protones en su núcleo, pero físicamente diferentes por tener masas distintas debido a que en su núcleo tienen distintos número de neutrones.

Ejemplo: Los 3 isótopos de hidrógeno:

ISÓBAROS.-

Son elementos químicamente diferentes, por tener diferente número de protones, pero físicamente iguales por tener igual masa en su núcleo.

Ejemplo: los isóbaros de Na y Mg. Aquí sus núcleos.

DISTRIBUCIÓN ELECTRÓNICA DE LOS ELEMENTOS

NÍVELES DE ENERGÍA

Son zonas, como cáscaras esféricas, que rodean al núcleo, configuradas por la presencia de un cierto número de electrones que circulan alrededor del núcleo. El número máximo de niveles que puede tener un átomo es 7, se le nombra con los nùmero cuánticos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 o las letras K, L, M, M, O, P, Q. El número máximo de electrones en cada uno de estos niveles es de 2, 8, 18, 32, 32, 18, 8, repetidamente.

SUB-NIVELES

Son zonas en las que se subdivide los niveles. El número máximo de subniveles que puede tener un nivel es 4, se les nombra con las letras “s”, “p”, “d”, “f”.

El número máximo de electrones en cada uno de estos subniveles es de 2, 6, 10, 14, respectivamente.

NÚMEROS CUÁNTICOS

Para conocer la distribución y posición de los electrones en los niveles, subniveles y orbitales se les presenta por 3 números cuánticos.

$$n l^x$$

n = número cuántico principal, indica el nivel (puede ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

l = número cuántico azimuta o subnivel (puede ser 0, 1, 2, 3 o s, p, d, f, respectivamente y su variación es de 0 a (n-1)).

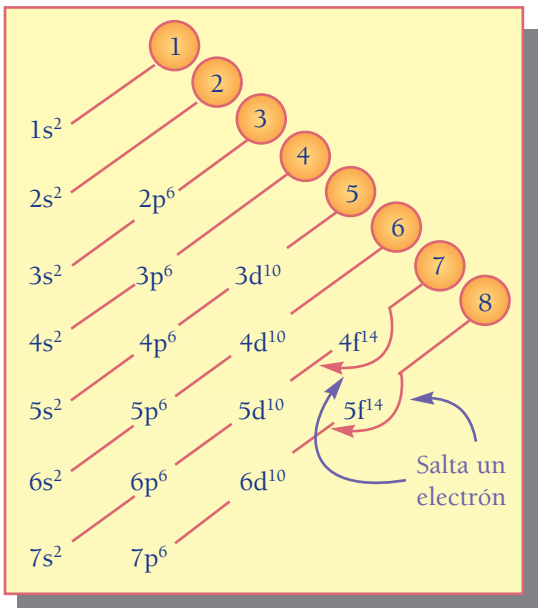
x = número de electrones en el sub-nivel.

M = Momento Magnético. Y su variación es de -L a + L.

UNA REGLA PARA LA DISTRIBUCIÓN ELECTRÓNICA

S = Nº cuántico por spin y sus valores

$$\text{son } +\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{1}{2}$$



En los rellenados de las diagonales (7) y (8), se hace saltar un electrón y luego se prosigue de manera normal.

Ejemplo:

1) Indicar la estructura electrónica del elemento z = 28.

$1s^2 \quad 2s^2 \quad 2p^6 \quad 3s^2 \quad 3p^6 \quad 4s^2 \quad 3d^8$

Ejemplo:

2) z = 57, utilizando el paso del salto del electrón.

$1s^2 \quad 2s^2 \quad 2p^6 \quad 3s^2 \quad 3p^6 \quad 4s^2 \quad 3d^{10}$

$4p^6 \quad 5s^2 \quad 4d^{10} \quad 5p^6 \quad 6s^2 \quad 5d^1$

CONCEPTO ADICIONALES

ELECTRONEGATIVIDAD

Es una medida de la fuerza con que un átomo atrae los electones de otros, en un enlace químico. La electronegatividad de los elementos, en la tabla periódica, aumenta de abajo hacia arriba en cada grupo y de izquieda a derecha en cada período.

AFINIDAD

Energía que atrae y une a los átomos para formar moléculas o compuestos químicos.

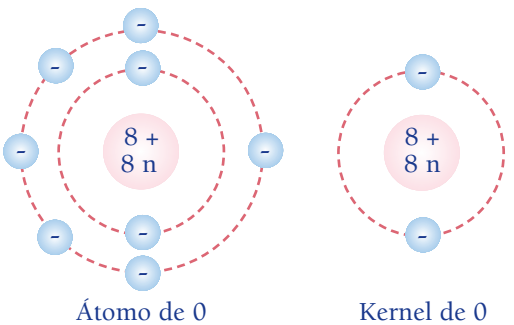
VALENCIA

Es la "fuerza" con la que un átomo "retiene" los electrones que "gana" o también "fuerza" con la que trata de "recuperar" electrones que haya "perdido".

KERNEL

Es la parte de un átomo sin considerar la última capa.

Ejemplo:



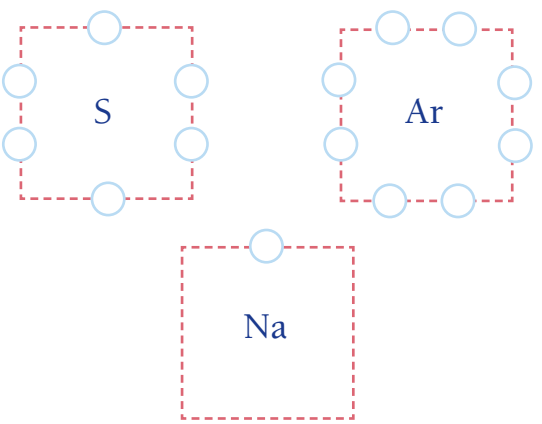
NOMENCLATURA LEWIS

1) El Kernel del átomo se representa por el símbolo del átomo.

2) Los elementos de la última capa se distribuye por orbitales.

3) Alrededor del Kernel (símbolo), se traza un cuadrado imaginario, haciendo corresponder cada lado del cuadrado a un orbital de la última capa.

4) Los electrones de la última capa se representa alrededor del Kernel sobre los lados del cuadrado imaginario, mediante cualquiera de estos símbolos: x, o, *, Δ, etc.



ENLACE IÓNICO

Es el que se forma por la atracción electrostática de dos iones, de carga contraria.

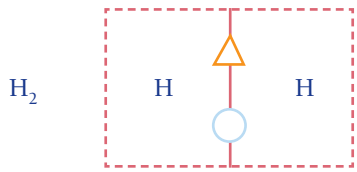
ENLACE COVALENTE

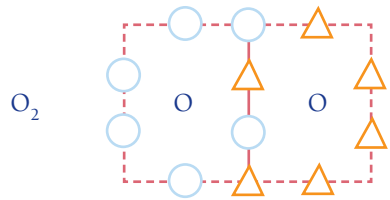
Se origina por la coparticipación de pares de electrones entre dos átomos. Puede ser puro o polar.

ENLACE COVALENTE PURO

Es el que se produce entre dos átomos del mismo elemento.

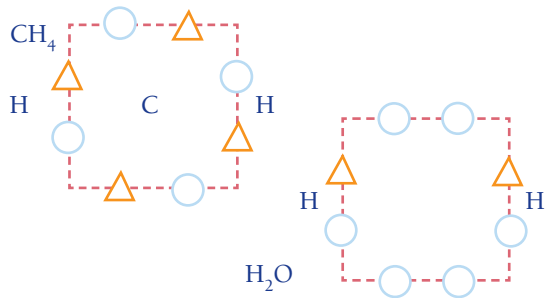
Ejemplo:





ENLACE COVALENTE POLAR

Entre átomos pertenecientes a elementos diferentes, creándose una polaridad electrostática.



A continuación, la tabla más usada, es la tabla larga, diseñada por Werner.Está dividida en zonas s, p, d, f.

Las zonas s, p, d, f, son los lugares donde están los elementos cuyo sunivel más externo es esa letra.

Las columnas verticales se denomina grupos, se designa con números romanos y una letra A o B. Si el grupo está conformado por elementos típicos la letra es "A", si está conformado por elementos de transición la letra es "B".

La relación o semejanza de las propiedades químicas es vertical, a excepción del grupo VIII, que no lleva letra, donde la relación de propiedades químicas es horizontal.

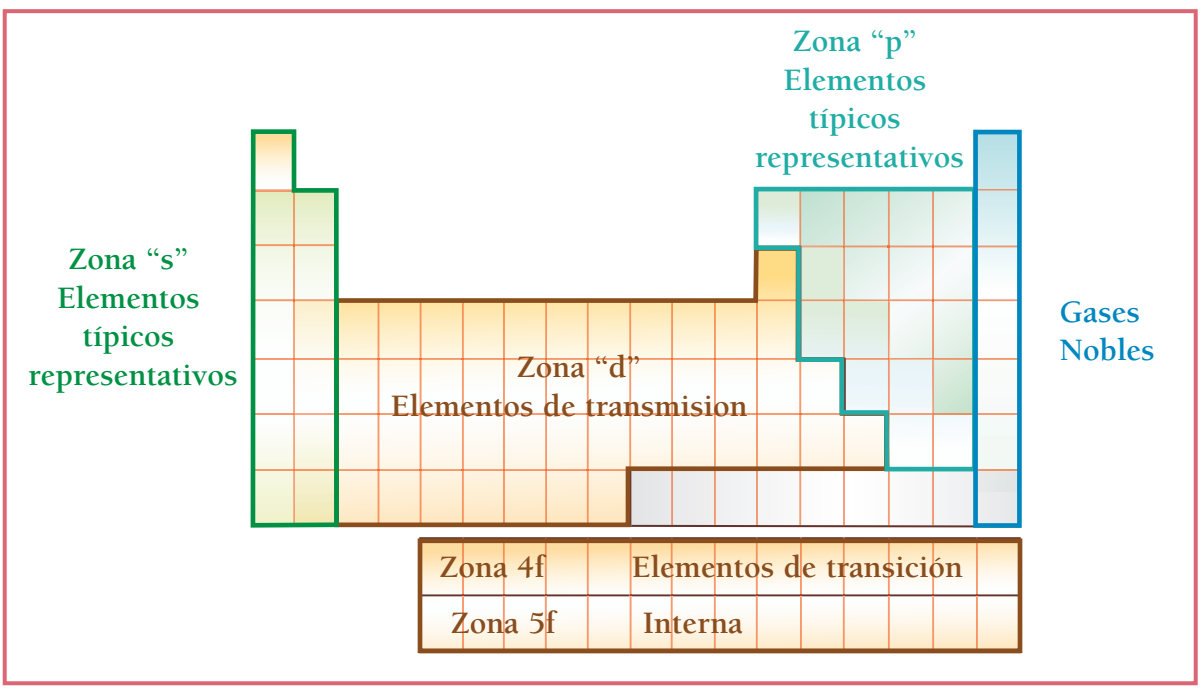


TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

Estado Físico → s
Nº Atómico → 79
Símbolo → Au
Estado de oxidación (Valencia) → 3,1
Peso Atómico → 196,967
Distribución Electrónica → $4f^{14}5d^{10}6s^{1}$

PERÍODOS	GRUPOS 1A	2A	3B	4B	5B	6B	7B	8	8	8	1B	2B	3A	4A	5A	6A	7A	0
1	g H 1 1 1,008 $1s^1$																	g He 2 0 4,003 $1s^2$
2	s Li 3 1 6,939 $1s^2\ 2s^1$	s Be 4 2 9,012 $1s^2\ 2s^1$											s B 5 3 10,811 $1s^2 2s^2\ 2p^1$	s C 6 2,4,3 12,011 $1s^2 2s^2\ 2p^2$	g N 7 2,3,5,4,2,1 12,011 $1s^2 2s^2\ 2p^3$	g O 8 2 15,999 $1s^2 2s^2\ 2p^4$	g F 9 1 18,998 $1s^2 2s^2\ 2p^5$	g Ne 10 0 20,183 $1s^2 2s^2\ 2p^6$
3 (Ne)	s Na 11 1 22,999 $3s^1$	s Mg 12 2 24,312 $3s^2$											s Al 13 3 26,982 $3s^2\ 3p^1$	s Si 14 4 28,086 $3s^2\ 3p^2$	s P 15 2,3,5,1 30,974 $3s^2\ 3p^3$	s S 16 6,3,4,2 32,064 $3s^2\ 3p^4$	g Cl 17 6,3,4,2 32,064 $3s^2\ 3p^5$	g Ar 18 0 39,948 $3s^2\ 3p^6$
4 (Ar)	s K 19 1 39,102 $4s^1$	s Ca 20 2 40,88 $4s^2$	s Sc 21 3 44,956 $3d^1\ 4s^2$	s Ti 22 4,3 47,90 $3d^2\ 4s^2$	s V 23 5, 4, 3, 2 50,942 $3d^3\ 4s^2$	s Cr 24 6, 3, 2 51,996 $3d^5\ 4s^2$	s Mn 25 7, 6, 4, 2, 3 54,938 $3d^5\ 4s^2$	s Fe 26 2,3 55,847 $3d^6\ 4s^2$	s Co 27 2,3 58,933 $3d^7\ 4s^2$	s Ni 28 2,3 58,71 $3d^8\ 4s^2$	s Cu 29 2,1 63,54 $3d^{10}\ 4s^1$	s Zn 30 2 65,37 $3d^{10}\ 4s^2$	s Ga 31 3 69,72 $3d^{10}4s^2 4p^1$	s Ge 32 4 72,99 $3d^{10}4s^2 4p^2$	s As 33 3,5 74,922 $3d^{10}4s^2 4p^3$	s Se 34 8,4,2 78,96 $3d^{10}4s^2 4p^4$	l Br 35 1,3,5 126,904 $3d^{10}4s^2 4p^5$	g Kr 36 0 83,80 $3d^{10}4s^2 4p^6$
5 (Kr)	s Rb 37 1 85,47 $5s^1$	s Sr 38 2 87,62 $5s^2$	s Y 39 3 88,905 $4d^1\ 5s^2$	s Zr 40 4 91,22 $4d^1\ 5s^2$	s Nb 41 5,3 92,906 $4d^4\ 5s^1$	s Mo 42 6, 5, 4, 3, 2 95,94 $4d^5\ 5s^1$	s Tc 43 7 (99) $4d^5\ 5s^1$	s Ru 44 2,3, 4, 6, 8 101,07 $4d^7\ 5s^1$	s Rh 45 2, 3, 6 102,905 $4d^8\ 5\ s^1$	s Pd 46 2,4 106,4 $4d^{10}\ 5s^0$	s Ag 47 1 107,870 $4d^{10}\ 5s^1$	s Cd 48 2 112,40 $4d^{10}\ 5s^2$	s In 49 3 114,82 $4d^{10}5s^2 5p^1$	s Sn 50 4,2 118,69 $4d^{10}5s^2 5p^2$	s Sb 51 2,3,5 121,75 $4d^{10}5s^2 5p^3$	s Te 52 6,4,2 127,60 $4d^{10}5s^2 5p^4$	s I 53 2,1,3,5,7 126,904 $4d^{10}5s^2 5p^5$	g Xe 54 0 131,30 $4d^{10}5s^2 5p^6$
6 (Xe)	s Cs 55 1 132,905 $6s^1$	s Ba 56 2 137,34 $6s^2$	s La 57 3 138,91 $5d^1\ 6s^2$	s Hf 72 4 178,49 $4f^{14}5d^2 6s^2$	s Ta 73 5 180,948 $4f^{14}5d^3 6s^2$	s W 74 6, 5, 4, 3, 2 180,948 $4f^{14}5d^4 6s^2$	s Re 75 7, 6, 4, 3,2 180,85 $4f^{14}5d^5 6s^2$	s Os 76 2, 3, 4, 6,8 190,2 $4f^{14}5d^6 6s^2$	s Ir 77 2, 3, 4, 6 192,2 $4f^{14}5d^7 6s^2$	s Pt 78 2,4 195,09 $4f^{14}5d^9 6s^1$	s Au 79 3,1 196,967 $4f^{14}5d^{10} 6s^1$	l Hg 80 2,1 200,59 $4f^{14}5d^{10} 6s^2$	s Ti 81 3,1 204,37 $4f^{14}5d^{10} 6p^1$	s Pb 82 4,2 207,19 $4f^{14}5d^{10} 6p^2$	s Bi 83 3,5 208,980 $4f^{14}5d^{10} 6p^3$	s Po 84 4,2 (209) $4f^{14}5d^{10} 6p^4$	s At 85 4,2 (210) $4f^{14}5d^{10} 6p^5$	g Rn 86 0 (222) $4f^{14}5d^{10} 6p^6$
7 (Rn)	s Fr 87 1 (223) $7s^1$	s Ra 88 2 (226) $7s^2$	s Ac 89 3 (227) $6d^1\ 7s^2$	s Rf 104 (261) $5f^{14}6d^2\ 7s^2$	s Db 105 (262) $5f^{14}6d^3\ 7s^2$	s Sg 106 (263) $5f^{14}6d^4\ 7s^2$	s Bh 107 (264) $5f^{14}6d^5\ 7s^2$	s Hs 108 (265) $5f^{14}6d^6\ 7s^2$	s Mt 109 (266) $5f^{14}6d^7\ 7s^2$	s Uun 110 (269) $5f^{14}6d^9\ 7s^1$	s Uuu 111 (272) $5f^{14}6d^{10} 7s^1$	s Uub 112 (277) $5f^{14}6d^{10} 7s^2$		s Uuq 114 (285) $5f^{14}6d^{10}\ 7s^2 7p^2$		s Uuh 116 (289) $5f^{14}6d^{10}\ 7s^2 7p^4$		s Uuo 118 (293) $5f^{14}6d^{10}\ 7s^2 7p^6$

6	s Ce 58 3,4 140,12 $4f^1 5d^1\ 6s^2$	s Pr 59 3,4 140,907 $4f^3 5d^0\ 6s^2$	s Nd 60 3 144,24 $4f^4 5d^0\ 6s^2$	s Pm 61 3 (147) $4f^5 5d^0\ 6s^2$	s Sm 62 3,2 150,35 $4f^6 5d^0\ 6s^2$	s Eu 63 3,2 151,96 $4f^7 5d^1\ 6s^2$	s Gd 64 3 157,25 $4f^7 5d^1\ 6s^2$	s Tb 65 3,4 158,924 $4f^8 5d^1\ 6s^2$	s Dy 66 3 162,50 $4f^9 5d^1\ 6s^2$	s Ho 67 3 164,930 $4f^{10} 5d^1\ 6s^2$	s Er 68 3,2 167,26 $4f^{11} 5d^1\ 6s^2$	s Tm 69 3,2 168,934 $4f^{13} 5d^1\ 6s^2$	s Yb 70 3,2 173,04 $4f^{14} 5d^0\ 6s^2$	s Lu 71 3 174,97 $4f^{14} 5d^1\ 6s^2$
7	s Th 90 4 232,038 $6s^2\ 7s^2$	s Pa 91 5,4 (231) $5f^2 6d^0\ 7s^2$	s U 92 8,5,4,3 238,03 $5f^3 6d^1\ 7s^2$	s Np 93 6,5,4,3 (237) $5f^5 6d^0\ 7s^2$	s Pu 94 6,5,4,3 (242) $5f^6 6d^0\ 7s^2$	s Am 95 6,5,4,3 (243) $5f^7 6d^0\ 7s^2$	s Cm 96 3 (247) $5f^7 6d^1\ 7s^2$	s Bk 97 4,3 (247) $5f^8 6d^1\ 7s^2$	s Cf 98 3 (249) $5f^9 6d^1\ 7s^2$	s Es 99 3 (254) $5f^{10} 6d^1\ 7s^2$	s Fm 100 3 (253) $5f^{11} 6d^1\ 7s^2$	s Md 101 3 (256) $5f^{12} 6d^1\ 7s^2$	s No 102 3 (254) $5f^{13} 6d^1\ 7s^2$	s Lw 103 3 (257) $5f^{14} 6d^1\ 7s^2$

GRUPOS PRINCIPALES DE LA TABLA

I A : Metales alcalinos

II A : Metales alcalinos térreos

IV A : Carbonoides o familia del Carbono

V A : Nitrogenoides o familia del Nitrógeno

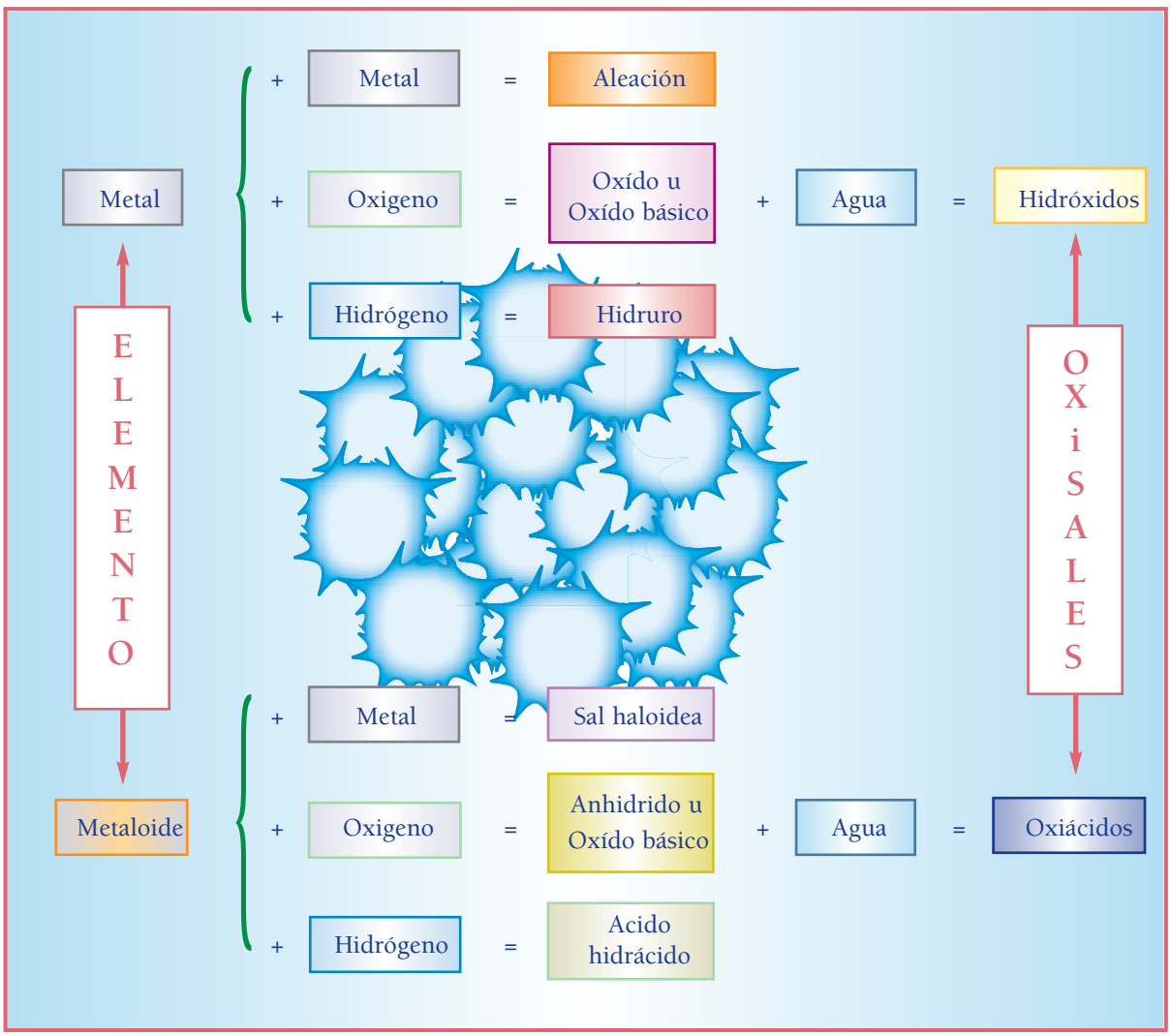
VI A : Anfígenos o familia del Oxígeno

VII A : Halógenos

O : Gases nobles

NOMENCLATURA

Es el estudio de los "nombres de los elementos y de los compuestos" y es también el estudio de la "escritura de las fórmulas".



NOMENCLATURA QUÍMICA

NOMBRE DE LOS ÁTOMOS EN SU ESTADO IÓNICO

ANIONES

Son elementos que **han generado electrones**, por eso su **valencia es negativa**. Tienen una sola valencia negativa, se les nombra haciendo terminar en URO su nombre genitivo.

HALÓGENOS
Grupo VII-A en la Tabla Periódica

Flúor :	$F^o + 1e = F^{-1}$	FluorURO
Cloro :	$Cl^o + 1e = Cl^{-1}$	clorURO
Bromo :	$Br^o + 1e = Br^{-1}$	BromURO
Lodo :	$I^o + 1e = I^-$	YodURO

ANFÍGENOS
Grupo VI-A en la Tabla Periódica

Oxígeno :	$O^o + 2e = O^{-2}$	Oxígeno
Azufre :	$S^o + 2e = S^{-2}$	SulfURO
Selenio :	$Se^o + 2e = Se^{-2}$	SeleniURO
Teluro :	$Te^o + 2e = Te^{-2}$	TelorURO

NITRÓGENOIDES
Grupo V-A en la Tabla Periódica

Nitrógeno :	$N^o + 3e = N^{-3}$	NitrURO
Fósforo :	$P^o + 3e = P^{-3}$	FosfURO
Arsénico :	$As^o + 3e = As^{-3}$	ArseniURO

CARBONOIDES
Grupo IV-A en la Tabla Periódica

Carbono :	$C^o + 4e = C^{-4}$	CarbURO
Silicio :	$Si^o + 4e = C^{-4}$	SiliciURO

CATIONES

Son elementos que **han perdido electrones**, por eso **su valencia es positiva**. Pueden ser con una sola valencia positiva, son los UNIVALENTES y los POLI-VALENTES que pueden ser con dos, con tres, con cuatro y hasta con 5 valencias positivas distintas.

A) UNIVALENTES

MONOVALENTES

Litio	: $Li^o - 1e = li^{+1}$	Litio o Lítico
Sodio	: $Na^o - 1e = Na^{+1}$	Sodio o Sódico
Potasio	: $K^o - 1e = K^{+1}$	Potasio o Potásico
Cesio	: $CS^o - 1e = Ce^{+1}$	Cesio o Césico
Plata	: $Ag^o - 1e = Ag^{+1}$	Plata o Argéntico

DIVALENTES

Calcio	: $Ca^o - 2e = Ca^{+2}$	Calcio o Cálcico
Magnesio	: $Mg^o - 2e = Mg^{+2}$	Magnesio o Magnésico
Estroncio	: $Sr^o - 2e = Sr^{+2}$	Estroncio o Estróncico
Bario	: $Ba^o - 2e = Ba^{+2}$	Bario o Bárico
Zinc	: $Zn^o - 2e = Zn^{+2}$	Zinc o Zínico

TRIVALENTES

Aluminio	: $Al^o - 3e = Al^{+3}$	Aluminio o Alumínico
Bismuto	: $Bi^o - 3e = Bi^{+3}$	Bismuto o Bismútico
Boro	: $Bo^o - 3e = Bo^{+3}$	Boro o Bórico

B) POLIVANTES

Que tienen "dos valencias positivas distintas"

Cuando está con su MENOR valencia se le hace terminar en OSO y cuando con su MAYOR valencia, en ICO.

Fierro:	$Fe^{o} - 2e = Fe^{+2}$	FerrOSO
	$Fe^{o} - 3e = Fe^{+3}$	FérrICO
Cobre:	$Cu^{o} - 1e = Cu^{+1}$	CuprOSO
	$Cu^{o} - 2e = Cu^{+2}$	CúpriCO
Mercurio:	$Hg^{o} - 1e = Hg^{+1}$	MercuriOSO
	$Hg^{o} - 2e = Hg^{+2}$	MercúrICO
Oro:	$Au^{o} - 1e = Au^{+1}$	AurOSO
	$Au^{o} - 3e = Au^{+3}$	AurICO
Cobalto:	$Co^{o} - 2e = Co^{+2}$	CobaltOSO
	$Co^{o} - 3e = Co^{+3}$	CobáltICO
Níquel:	$Ni^{o} - 2e = Ni^{+2}$	NiquelOSO
	$Ni^{o} - 3e = Ni^{+3}$	NiquélICO
Platino:	$Pt^{o} - 2e = Pt^{+2}$	PlatinOSO
	$Pt^{o} - 3e = Pt^{+3}$	PlatínICO

Que tienen "tres valencias positivas distintas"

Cuando está con su MENOR valencia se le antepone HIPO y se le hace terminar en OSO y los otros dos igual que el caso anterior.

Azufre:	$S^{o} - 2e = S^{+2}$	HIPO SulfurOSO
	$S^{o} - 4e = S^{+4}$	SulfurOSO
	$S^{o} - 6e = S^{+6}$	SulfúrICO
Selenio:	$Se^{o} - 2e = Se^{+2}$	HIPO SeleniOSO
	$Se^{o} - 4e = Se^{+4}$	SeleniOSO
	$Se^{o} - 6e = Se^{+6}$	SelénICO
Titanio:	$Ti^{o} - 2e = Ti^{+2}$	HIPO TitanOSO
	$Ti^{o} - 3e = Ti^{+3}$	TitanOSO
	$Ti^{o} - 4e = Ti^{+4}$	TitanICO

Que tienen "cuatro valencias positivas distintas"

Cuando está con su MAYOR valencia se le antepone el prefijo PER y se hace terminar en ICO, u los otros tres igual que el caso anterior.

Cloro:	$Cl^{o} - 1e = Cl^{+1}$	HIPO clorOSO
	$Cl^{o} - 3e = Cl^{+3}$	clorOSO
	$Cl^{o} - 5e = Cl^{+5}$	clórICO
	$Cl^{o} - 7e = Cl^{+7}$	PER clórICO
Bromo:	$Br^{o} - 1e = Br^{+1}$	HIPO bromOSO
	$Br^{o} - 3e = Br^{+3}$	bromOSO
	$Br^{o} - 5e = Br^{+5}$	bromICO
	$Br^{o} - 7e = Br^{+7}$	PER brómICO
Uranio:	$U^{o} - 3e = U^{+3}$	HIPO uranOSO
	$U^{o} - 4e = U^{+4}$	uranOSO
	$U^{o} - 5e = U^{+5}$	uránICO
	$U^{o} - 6e = U^{+6}$	PER uránICO

NOMBRE DE LOS COMPUESTOS

FUNCIÓN QUÍMICA

Es una serie de características que le son comunes a ciertos cuerpos y que por esta razón se agrupan en una "Función Química".

Existen las siguientes funciones:

FUNCIÓN	ELEMENTOS QUE LO IDENTIFICA	COMPUESTO
I Anhídrido	m + O	B
II Oxido	m + O	B
III Acido		
a) Hidrácido	H + m	B
b) Oxácido	H + m + O	T
IV Base	M + (OH)	T
V Sal		
a) Hidrácida		
Acida	M + m + H	T
Básica	M + m +(OH)	C
Neutra	M + m	B
b) Oxácida		
Acida	M + m + O + H	C
Básica	M + m + O + (OH)	C
Neutra	M + m + O	T

LEYENDA:

m = metaloide	B = binario
M = metal	T = ternario
H = hidrógeno	C = cuaternario
O = oxígeno	

NOMBRE DE LOS ANHÍDRIDOS

Compuestos por metaloide y oxígeno, se les llama también "óxidos ácidos", porque con agua dan ácido oxácido.

METALOIDE + OXÍGENO = ANHÍDRIDO

Un anhídrido se le nombra con la palabra "anhídrido", seguido del nombre iónico del metaloide.

Ejemplos:

SO o $S^{+2}O^{-2}$	anhídrido HIPO sulfurOSO
SO_2 o $S^{+4}O^{-2}$	anhídrido sulfurOSO
SO_3 o $S^{+6}O^{-2}$	anhídrido sulfúrICO
Cl_2O o $Cl_2^{+1}O^{-2}$	anhídrido HIPO clorOSO
Cl_2O_3 o $Cl_2^{+3}O_3^{-2}$	anhídrido clorOSO
Cl_2O_5 o $Cl_2^{+5}O_5^{-2}$	anhídrido clórICO
Cl_2O_7 o $Cl_2^{+7}O_7^{-2}$	anhídrido PER clórICO
N_2O_3 o $N_2^{+3}O_3^{-2}$	anhídrido nítrOSO
N_2O_5 o $N_2^{+5}O_5^{-2}$	anhídrido nítrICO

NOMBRE DE LOS ÓXIDOS

Compuestos de metal y oxígeno, se les llama también "óxidos básicos" porque con el agua dan bases.

METAL + OXÍGENO = ÓXIDO

Un óxido se le nombra con la palabra "óxido" seguido del nombre iónico del metal.

Ejemplos:

FeO o $Fe^{+2}O^{-2}$	óxido ferrOSO
Fe_2O_3 o $Fe_2^{+3}O_3^{-2}$	óxido férrICO
Na_2O o $Na_2^{+1}O^{-2}$	óxido de Sodio
Cu_2O o $Cu_2^{+1}O^{-2}$	óxido cúprOSO
Cl_2O_3 o $Al_2^{+3}O_3^{-2}$	óxido de aluminio

NOMBRE DE LOS PEROXIDOS

Peróxidos, son óxidos que tienen más oxígeno de lo que permite la valencia máxima del metal. Se forma agregando un átomo de oxígeno al óxido que forma el metal con su máxima valencia.

Se les nombra con la palabra PERÓXIDO, seguido del nombre iónico del metal.

$BaO + O = BaO_2$	PERÓXIDO de bario
$H_2O + O = H_2O_2$	PERÓXIDO de hidrógeno (agua oxigenada)
$CuO + O = CuO_2$	PERÓXIDO cúprico
$PbO_2 + O = PbO_3$	PERÓXIDO plúbico
$Mn_2O_3 + O = Mn_2O_4$	PERÓXIDO mangánico

NOMBRE DE LOS ÁCIDOS

Son compuestos que al disolverse en agua siempre producen iones H o H_3O^+. Son de sabor agrio, enrojecen el papel de tornasol, decoloran la fenolftaleína. Son de dos clases: Hidrácidos y Oxácidos.

A) ÁCIDOS HIDRÁCIDOS

Son compuestos binarios constituidos por "H" y metaloide (especialmente halógeno).

HIDROGENO + METALOIDE = ÁCIDO HIDRÁCIDO

Cuando estos compuestos están libres son gaseosos y se acostumbra a nombrarlos con el "nombre iónico del metaloide", seguido de la palabra "de

hidrógeno". Cuando están disueltos en agua se prefiere llamarlos con la palabra "ácido" seguido del nombre del metaloide terminado en hídrico.

Ejemplos:

HCI	clorURO de hidrógeno o ácido clorHÍDRICO
HI	YodURO de hidrógeno o ácido yodHÍDRICO
HBr	BromURO de hidrógeno o ácido bromHÍDRICO

B) ÁCIDOS OXÁCIDOS

Son compuestos ternarios de hidrógeno, oxígeno y metaloide; resultan de la combinación de un anhídrido con el agua.

ANHÍDRIDO + AGUA = ÁCIDO OXÁCIDO

Se les nombra con la palabra "ácido" seguido del "nombre iónico del metaloide".

Ejemplos:

H_2SO_4 o $H_2^{+1}S^{+6}O_4^{-2}$	ácido sulfúrICO	(S^{+6})
H_2SO_3 o $H_2^{+1}S^{+4}O_3^{-2}$	ácido sulfúrOSO	(S^{+4})
HNO_2 o $H^{+1}N^{+3}O_2^{-2}$	ácido nitrOSO	(N^{+3})
HNO_3 o $H^{+1}N^{+5}O_2^{-2}$	ácido nítrICO	(N^{+5})
HCIO o $H^{+1}CI^{+1}O^{-2}$	ácido HIPOclorOSO	(Cl^{+1})
$HCIO_2$ o $H^{+1}CI^{+3}O_2^{-2}$	ácido clorOSO	(CI^{+3})
$HCIO_3$ o $H^{+1}CI^{+5}O_3^{-2}$	ácido clórICO	(CI^{+5})
$HCIO_4$ o $H^{+1}CI^{+7}O_4^{-2}$	ácido PERclórICO	(CI^{-7})
H_3PO_3 o $H^{+1}P^{+3}O_3^{-2}$	ácido fosforOSO	(P^{+3})
H_3PO_5 o $H_3^{+1}P^{+5}O_3^{-2}$	ácido fosfórICO	(P^{+5})
H_2CrO_3 o $H_2^{+1}Cr^{+6}O_3^{-2}$	ácido crómICO	(Cr^{+6})
$H_2Cr_2O_7$ o $H_2^{+1}Cr_2^{+6}O_7^{-2}$	ácido dicrómICO	(Cr^{+6})
H_2MnO_4 o $H_2^{+1}Mn^{+6}O_4^{-2}$	ácido mangánICO	(Mn^{+6})
$HMnO_4$ o $H^{+1}Mn^{+7}O_4^{-2}$	ácido PERmangánICO	(Mn^{+7})

C) ÁCIDOS ESPECIALES

• ÁCIDO POLIHÍDRATADOS

Son aquellos que se combinan con cantidades variables de agua.

Cuando el metaloide es de "valencia impar"

Se les nombra anteponiendo la palabra META, PIRO y ORTO, al nombre iónico del metaloide, según que la combinación del anhídrido se haya hecho en 1, 2 o 3 moléculas de agua.

Ejemplo: Fósforo con valencia +3:

$P_2O_3 + H_2O = 2HPO_2$	ácido METAfosforOSO
$P_2O_3 + 2H_2O = H_4P_2O_5$	ácido PIROfosforOSO
$P_2O_3 + 2H_2O = 2H_3PO_3$	ácido ORTOfosforOSO

Cuando el metaloide es de "valencia par"

Ejemplo: Carbono con valencia + 4:

$CO_2 + H_2O = H_2CO_3$	ácido METAcarbónICO
$2CO_2 + H_2O = H_2C_2O_5$	ácido PIROcarbónICO
$CO_2 + 2H_2O = H_4CO_4$	ácido ORTOcarbónICO

Se les nombra de la siguiente manera:

1 anhídrido + 1 agua = META

2 anhídridos + 1 agua = PIRO

1 anhídrido + 2 aguas = ORTO

• POLIÁCIDOS

Son aquellos que tienen más de dos átomos de metaloide en su molécula.

Se les nombra con la palabra ácido, seguido del nombre iónico del metaloide al cual se le antepone BI, TRI, TETRA, etc., según indique el subíndice del metaloiede en la fórmula.

NOTA

Todos los "piro-ácidos", además de ser tales, pertenecen también al grupo de los "poliácidos" porque tienen 2 metaloides en su molécula.

Ejemplos:

$H_4P_2O_7$	ácido DI fosfórico o pirofosfórico
$H_4B_2O_5$	ácido DI bórico o pirobórico
$H_4N_2O_5$	ácido DI nitroso o piro nitroso
$H_4N_2O_7$	ácido DI nítrico o piro nítrico

Otros ejemplos:

$H_2B_4O_7$	ácido TETRAbórico
$H_2C_3O_7$	ácido TRIcarbónico
$H_2S_4O_{13}$	ácido TETRAsulfúrico
$H_2Si_3O_7$	ácido TRIsilícico

• THIOÁCIDOS

Son ácidos que resultan de sustituir uno o más oxígenos del ácido oxácido, por azufre S^{-2}

Se les nombra con el prefijo THIO, anteponiendo DI, TRI, etc., según el número de O^{-2} que hayan sido sustituidos por S^{-2}. Si la sustitución es total, se le antepone SULFO al nombre del ácido.

Ejemplos:

HNSO	ácido THIOnitroso (del HNO_2)
H_2CSO	ácido THIOcarbonoso (del H_2CO_2)
HCIOS	ácido THIOcloroso (del HCIO)
H_2CSO_2	ácido DI THIOcarbónico (del H_2CO_3)
$HCISO_2$	ácido DI THIOclórico (del $HCIO_3$)
$HCIS_2O_2$	ácido DI THIOperclórico (del $HCIO_4$)
$HCIS_3O$	ácido TRI THIOperclórico (del $HCIO_4$)
$H_2S_3O_2$	ácido DI THIO SULFÚRICO (del H_2SO_4)
H_2S_4O	ácido TRI THIOsulfúrico (del H_2SO_4)
H_2S_5	ácido TETRA THIOsulfúrico SULFOsulfúrico (del H_2SO_4)
$HCIS_4$	ácido TETRA THIOperclórico SULFOperclórico (del $HCIO_4$)

• PEROXÁCIDOS

Son aquellos ácidos que se forma reaccionando el anhídrido de mayor valencia del metaloide, con agua oxigenada, H_2O_2.

Se les nombra con la palabra "ácido" seguida del "nombre iónico del metaloide" anteponiendo la palabra PER o PEROXI.

Ejemplos:

$P_2O_5 + 3H_2O_2 = H_6P_2O_{11}$	ácidoPEROXIortofosfórico
$SO_3 + H_2O_2 = H_2SO_5$	ácido PEROXIsulfúrico
$N_2O_5 + H_2O_2 = H_2N_2O_7$	ácido PEROXInítrico
$Cl_2O_7 + H_2O_2 = H_2Cl_2O_9$	ácido PEROXIperclórico
$CO_2 + H_2O_2 = H_2CO_4$	ácido PEROXIcarbónico
$2SO_3 + H_2O_2 = H_2S_2O_8$	ácido PEROXIdisulfúrico

RADICALES HALOGÉNICOS

Son restos de la molécula de un ácido al cual de le ha quitado uno o más H^+. Puede ser Radical halogénico hidrácido o Radical halogénico oxácido.

A) RADICAL HALOGÉNICO HIDRÁCIDO

Es el residuo del ácido halogénico al que se le ha quitado uno o más H^+.

Se le nombra haciendo terminar en URO el nombre genérico del ácido; anterior poniendo BI, o posponiendo la palabra ÁCIDO si queda todavía H^+.

Ejemplos:

Cl^{-1} Cloruro (del HCI)

I^{-1} Yoduro (del HI)

S^{-2} Sulfuro (del H_2S)

F^{-1} Fluoruro (del HF)

$(SH)^{-1}$ Sulfuro ácido o BI sulfuro (del H_2S)

$(TeH)^{-1}$ Teloruro ácido o BI teloruro (del H_2Te)

B) RADICAL HALOGÉNICO OXÁCIDO

Es el que resulta de quitarle 1 o más H^+ a la molécula del ácido oxácido.

Se les nombra cambiando la terminación OSO por ITO la terminación ICO por ATO, al nombre del ácido del que deriva; seguido de la palabra ÁCIDO, o anteponiendo el prefijo BI siempre y cuando haya restos de H^+ en el radical, sin cambiar ningún prefijo al nombre del ácido.

Ejemplos:

$(ClO_2)^{-1}$ ClorITO (del $HClO_2$)

$(ClO_3)^{-1}$ ClorATO (del $HClO_3$)

$(ClO_4)^{-1}$ PlerclorATO (del $HClO_4$)

$(NO_2)^{-1}$ NitrITO (del HNO_2)

$(NO_3)^{-1}$ NitrATO (del HNO_3)

$(HSO_4)^{-1}$ SulfATO ÁCIDO o BI sulfato (del H_2SO_4)

$(SO_4)^{-2}$ SulfATO (del H_2SO_4)

$(CO_3)^{-2}$ CarbonATO (del H_2CO_3)

$(S_2O_8)^{-2}$ PEROXI disulfATO (del $H_2S_2O_8$)

$(HCO_3)^{-1}$ CarbonATO ÁCIDO o BI carbonATO (del H_2CO_3)

$(H_2PO_4)^{-1}$ FosfATO DI ÁCIDO o BI DI fosfATO (del H_3PO_4)

$(H_2P_2O_7)^{-2}$ PIRO fosfATO DI ÁCIDO (del $H_4P_2O_7$)

$(CSO_2)^{-2}$ THIO carbonATO (del H_2CO_3)

$(HCS_2O)^{-1}$ DI THIO bicarbonATO (del H_2CO_3)

$(Cl_2O_9)^{-2}$ PEROXI perclorATO (del $H_2Cl_2O_9$)

NOMBRE DE LAS BASE o HIDRÓCIDOS

Son compuestos que resultan de la combinación de un óxido con el agua. Se caracterizan por la presencia del grupo $(OH)^-$. Colorea de violeta el papel de tornasol y de rojo la fenolftaleína.

ÓXIDO + AGUA = BASE o HIDRÓXIDO

Se les nombra con la palabra "hidróxido" seguido del "nombre iónico" del metal.

Ejemplos:

$Hg(OH)_2$ o $Hg^{+2}(OH)_2^{-1}$ hidróxido mercúrico

$Pb(OH)_2$ o $Pb^{+2}(OH)_2^{-1}$ hidróxido plumboso

$Pb(OH)_4$ o $Pb^{+4}(OH)_4^{-1}$ hidróxido plúmbico

$Ni(OH)_2$ o $Nl^{+2}(OH)^{-1}_2$	hidróxido hiponiqueloso
$Ni(OH)_3$ o $Ni^{+2}(OH)^{-1}_3$	hidróxido niqueloso
$Ni(OH)_4$ o $Ni^{+4}(OH)^{-1}_4$	hidróxido niquélico

NOMBRE DE LAS SALES

Resultan de la combinación de un ácido (hidrácido u oxácido) con una base, por consiguiente siempre están conformadas por un "catión" que es metal de la base y el "anión" que es el "radical halogénico" del ácido. Puede ser sal hidrácida u oxácida.

SALES
- Hidrácidas
  - Neutras: No tienen ni H^+ ni $(OH)^-$
  - Ácidas: Tienen H^+
  - Básicas: Tienen $(OH)^-$
- Oxácidas
  - Neutras: No tienen ni H^+ ni $(OH)^-$
  - Ácidas: Tienen H^+
  - Básicas: Tienen $(OH)^-$

A) SALES HIDRÁCIDAS

Resultan de la combinación de un ácido hidrácido con una base

ÁCIDO HIDRÁCIDO + BASE = SAL HIDRÁCIDA

Se les nombra con el nombre iónico del radical halogénico (seguido de la palabra "ácido" si tienen H^+) seguido del nombre iónico del metal (anteponiéndole la palabra "básico" si tiene $(OH)^-$).

Ejemplos:

ClNa	Cloruro de sodio
Cl_2Cu	Cloruro cúprico
$(HS)_2Fe$	Sulfuro ácido ferroso o bilsulfuro de fierro
ICa(OH)	Yoduro básico de calcio
$(HS)_4Pb$	Sulfuro ácido plúmbico o bisulfuro plúmbico
$S_3[(OH)Pb]_2$	Sulfuro básico plúmbico
Cl (OH)Au	Cloruro básico áurico
$I(OH)_2Mn$	Yoduro DI básico mangánico
$S[(OH)_3Pb]_2$	Sulfuro TRI básico plúmbico

B) SALES OXÁCIDAS

Resultan de la combinación de un ácido oxácido con una base.

ÁCIDO OXÁCIDO + BASE = SAL OXÁCIDA

Se les nombra con el nombre iónico de radical halogénico (seguido de la palabra "ácido" si hay H^+) seguido del nombre iónico del metal (anteponiendo la palabra "básico" si hay $(OH)^-$).

Ejemplos:

$(ClO)_2Pb$	hipoclorito plumboso
$(ClO)_4Pb$	hipoclorito plúmbico
$(NO_3)_3Fe$	nitrato férrico
$(NO_3)_2(OH)Fe$	nitrato básico férrico
$(Cr_2O_7)_3Au$	dicromato áurico
$(MnO_4)(OH)_2Mn$	Permanganato dibásico mangánico
$(HBO_3)Hg_2$	Borato ácido mercurioso o borato mercurioso.
$(HCO_3)_2Ca$	Carbonato ácido de calcio o bicarbonato de calcio.
$(SO_5)_2Pb$	PEROXIsulfato plúmbico

$(HCSO_2)_2Ca$	THIOcarbonato ácido de calcio o BI THIOcarbonato de calcio
$(HCO_4)_2Ca$	Bi PEROXIcarbonato de calcio o PEROXIcarbonato ácido de calcio

SALES DOBLES

Son las sales que tienen dos metales.

Se les nombra igual que cualquiera de las sales sólo que antes de nombrar los iones metálicos se escribe la palabra "doble".

$(SO_4)_2AlK$	Sulfato doble de aluminio y potasio
$(HSO_4)KNa$	Sulfato ácido doble de potasio y sodio
$PO_4Na(OH)Mg$	Fosfato doble de sodio básico de Magnesio
$(HCO_3)_6AlFe$	Bicarbonato doble de aluminio férrico

PECULIARIDADES DE LOS ÁCIDOS DEL FÓSFORO

1.- El ácido con P de Val + 1 da sólo el ácido ORTO:

H_3PO_2	ácido ORTO fosforoso o HIPOFOSFOROSO

2.- En el ácido hipofosoforoso sólo un hidrógeno es sustituido por metal, los otros dos son insustituibles, de manera que las sales son siempre DI-ÁCIDAS y cuando se lee la fórmula casi siempre se prescinde la mención de esta di-acidez.

Ejemplo:

$(H_2PO_2)Pb$	Hiposulfito plumboso
$(H_2PO_2)_6CaPb$	Hiposulfito doble de calcio plúmbico

3.- En los ácidos formados con el fósforo Val +2, siempre hay un HIDRÓGENO INSUSTITUIBLE, de manera que sus sales son "mono ácidas" y/o "di-ácidas".

a) Por ejemplo en el HPO_2, el fósforo es de valencia +3, el ácido tiene un solo H^+ que es insustituible, luego este ácido no da sales.

b) El ácido PIRO FOSFOROSO, $H_4P_2O_5$, puede dar sales mono, di y tri ácidas.

Ejemplos:

$AlHP_2O_5$	PIRO fosfito de aluminio
$Al_2(H_2P_2O_5)$	PIRO fosfito DI ácido de aluminio
$Fe_3(HP_2O_5)_2$	PIRO fosfito ácidoferroso
$Fe(H_3P_2O_5)_3$	PIRO fosfito TRI ácido férrico

ÓXIDOS DOBLES

Resultan de escribir en una sola forma las fórmulas de los óxidos terminados en OSO e ICO.

Se les nombra con la palabra ÓXIDO seguida de los "nombres iónicos" de los metales.

$FeO + Fe_2O_3 = Fe_3O_4$	óxido ferroso férrico
$2SnO + SnO = Sn_3O_4$	óxido estañoso estánico
$2PbO + Pb_2O_3 = Pb_3O_4$	óxido plumboso plúmbico
$MnO + Mn_2O_3 = Mn_3O_4$	óxido manganoso mangánico

RADICALES CATIONES COMPUESTOS

Son derivados de algunos HIDRUROS a los cuales se les agrega un H^+, dando origen a un radical positivo monovalente.

Se les nombra haciendo terminar en ONIO el nombre del hidruro que lo origina.

Ejemplos:

$NH_3 + H^+ = (NH_4)^+$	AnONIO
$PH_3 + H^+ = (PH_4)^+$	FosfONIO
$AsH_3 + H^+ = (AsH)_4^+$	ArsONIO
$H_2O + H^+ = (H_3O)^+$	HidONIO
$H_2S + H^+ = (H_3S)^+$	SulfONIO

ANFOTERISMO DEL CROMO, NITROGENO Y MANGANESO

Según la valencia, estos elementos pueden funcionar como metales o como metaloides, por consiguiente con el oxígeno pueden formar óxidos o anhídridos, y éstos con el agua a su vez forman BASES ó ÁCIDOS respectivamente. Ver el siguiente cuadro.

ELEMENTO	VALENCIA	MÁS OXÍGENO	NOMBRE DEL COMPUESTO	MÁS AGUA	NOMBRE DEL COMPUESTO
Cr	+2	CrO	óxido cromoso	$Cr(OH)_2$	hidróxido cromoso
Cr	+3	Cr_2O_3	óxido crómico	$Cr(OH)_3$	hidróxido crómico
Cr	+6	CrO_3	anhidrido crómico	H_2CrO_4	ácido crómico
N	+1	N_2O	óxido nitroso	$N(OH)$	hidróxido nitroso
N	+2	NO	óxido nítrico o monoxido de nitrógeno	$N(OH)_2$	hidróxido nítrico
N	+4	NO_2	óxido de nitrógeno o bioxído de nitrógeno	$N(OH)_4$	hidróxido nitrógeno
N	+3	N_2O_3	anhidrido nitroso	HNO_2	ácido nitroso
N	+5	N_2O_5	anhidrido nítrico	HNO_3	ácido nítrico
Mn	+2	MnO	óxido manganoso	$Mn(OH)_2$	hidróxido manganoso
Mn	+3	Mn_2O_3	óxido mangánico	$Mn(OH)_3$	hidróxido mangánico
Mn	+4	MnO_2	óxido de manganeso o dióxido de manganeso	$Mn(OH)_4$	hidroxído de manganeso
Mn	+6	MnO_3	anhidrido mangánico	H_2MnO_4	ácido mangánico
Mn	+7	Mn_2O_7	anhidrido permangánico	$HMnO_4$	ácido permangánico

UNIDADES QUÍMICAS DE MEDIDA

ÁTOMO-GRAMO Y MOLÉCULA-GRAMO

ÁTOMO

Es un corpúsculo elemental de extremada pequeñez, constituido por un "núcleo" que contiene protones y neutrones y una población de electrones que giran alrededor del núcleo, formando lo que se llama "envoltura" y que es un verdadero conjunto de cáscaras esféricas energéticas.

MOLÉCULA

Es la mínima porción de una sustancia, conformada por un átomo o un grupo de átomos, que puede existir en estado de libertad, sin tendencia a la combinación.

NÚMERO DE AVOGRADO

$$6{,}023 \cdot 10^{23}$$

indica:

a) El número de átomos que hay en una porción de elemento que se llama "átomo-gramo".

b) También el número de moléculas de una sustancia que hay en una porción de sustancia que se llama "molécula-gramo".

ÁTOMO-GRAMO

Es una porción de elemento donde hay $6{,}023 \cdot 10^{23}$ átomos y cuyo peso en gramos numéricamente es igual a su peso atómico.

Ejemplo:

P.a. Au = 197

Luego una barrita de 197 g Au se llama átomo-gramo y en esta barrita hay $6{,}023 \cdot 10^{23}$ átomos de Au.

El número de "átomo-gramos" que hay en un peso cualquiera de elemento se calcula así:

$$\# \text{At} - \text{g} = \frac{W}{A}$$

W = peso de una porción de elemento, en g

A = peso atómico expresado en gramos.

At-g = número de at-g

MOLÉCULA-GRAMO o MOL

Es una porción de una sustancia donde hay $6{,}023 \cdot 10^{23}$ moléculas, cuyo peso en gramos es numéricamente igual a su peso molecular.

Ejemplo:

P.m. H_2O = 18

Luego: 18 g H_2O se llama "molécula-gramo" o "mol" y en él hay $6{,}023 \cdot 10^{23}$ moléculas de H_2O.

El número de moles que hay en un peso cualquiera de sustancia se calcula así:

$$n = \frac{W}{M}$$

W = peso cualquiera de sustancia, en "g"

M = peso molecular expresado en gramos, se llama mol.

n = número de moles

Ejemplo:

¿Cuántas moles de NaOH hay en 70 g?

Dato: P.m. de NaOH = 40

Luego: M_{NaOH} = 40 g/mol

$$\therefore \quad n = \frac{70 \text{ g}}{40 \text{ g/mol}} = 1{,}75 \text{ mol de NaOH}$$

EL ESTADO GASEOSO

GAS

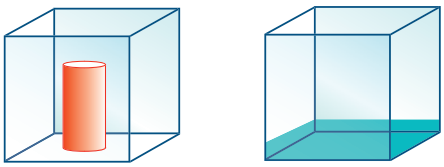
Es un estado de la materia en la que las moléculas gozan de movimiento libre e independiente, alejándose y acercándose entre sí en forma desordenada.

Sus movimientos son rectilìneos, caóticos y elásticos.

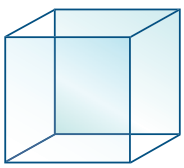
El volumen "V" que ocupa, la temperatura "T" y la presión "P" que ejerce, son variables en los gases, y según como varían se relacionan como leyes permanentes.

SÓLIDO
Forma y volumen
Definido

LÍQUIDO
Sólo volumen
definido



GAS
Ni forma ni volumen definido



LEY GENERAL DE LOS GASES

"En todo gas ideal el producto de la presión absoluta por el volumen, dividido entre la temperatura absoluta es constante".

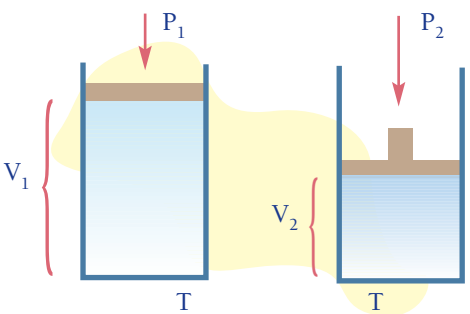
$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$$

LEY DE BOYLE Y MARIOTTE

"A temperatura constante, los volúmenes de un gas varía en forma inversamente proporcionales a las presiones absolutas".

El proceso se llama "**isotérmico**".

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

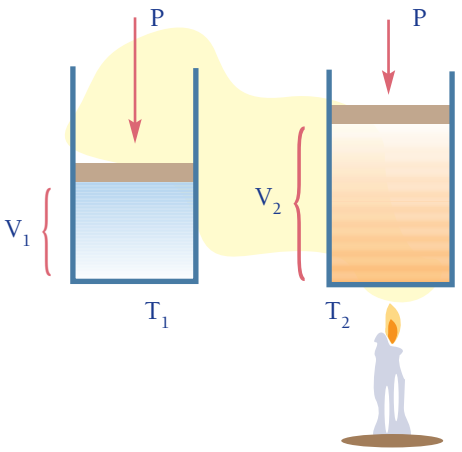


LEY DE CHARLES

"A presión constante, los volúmenes de un gas varían en forma directamente proporcionales a las temperaturas absolutas".

El proceso se llama "**isobárico**".

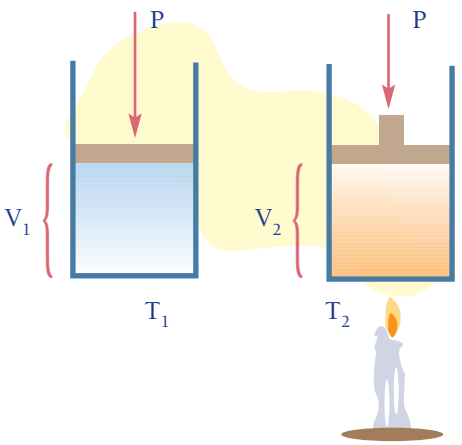
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$



LEY DE GAY-LUSSAC

"A volúmenes constantes, las presiones absolutas varían en forma directamente proporcional a las temperaturas absolutas". El proceso se llama "**isométrico**" o "**isócoro**".

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$



DENSIDAD DE UN GAS

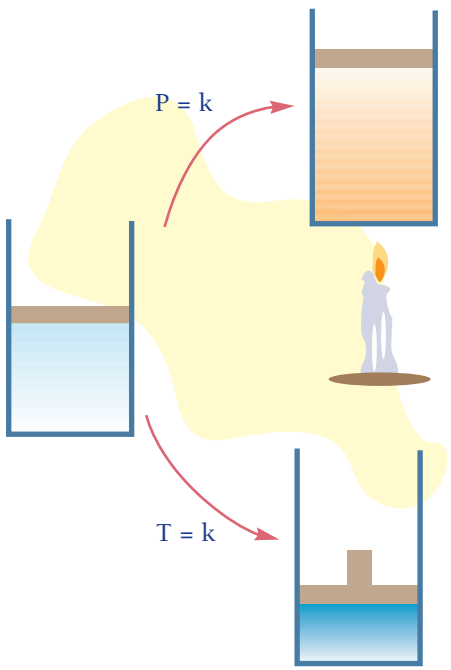
La densidad de un gas es variable y depende de las condiciones, es decir **depende de la temperatura** que tiene **y del volumen** que está ocupando, en todo caso, la densidad es:

$$\delta = \frac{W}{V}$$

Unidades SI: $\frac{N}{m^3}$

Pero que está sometida a una variación que depende de la presión y temperatura, según la siguiente ley:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$$



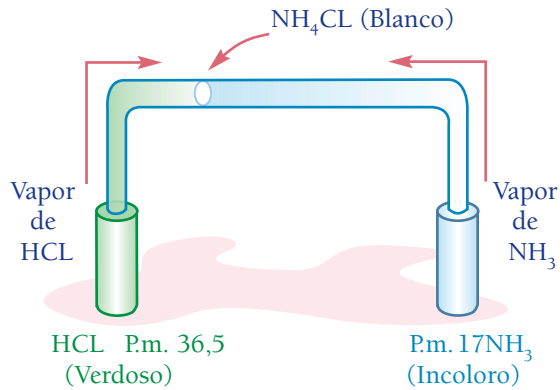
Esta ley dice:

"La densidad de un gas varía en forma directamente proporcional a su presión absoluta y en forma inversamente proporcional a su temperatura absoluta".

LEY DE DIFUSIÓN o LEY DE GRAHAM

"La velocidad de difusión de los gases es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de sus masas moleculares o de sus densidades".

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{Pm_2}}{\sqrt{Pm_1}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{D_1}}$$



ECUACIÓN UNIVERSAL DE LOS GASES

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

P = presión de un gas en reposo

V = volumen que ocupa ese gas en reposo.

N = número de moles que contiene

R = constante general de los gases, cuyo valor depende de las unidades que se usan.

T = temperatura absoluta del gas.

Valores que se emplea para R, según las unidades que se usa en el problema;

$$R = 0{,}082 \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}$$

$$R = 62{,}4 \frac{mmHg \cdot L}{mol \cdot K}$$

$$R = 10{,}7 \frac{psia \cdot ft^3}{Mol\text{-}lib \cdot R}$$

Ejemplo:

Calcular el peso de CO_2 encerrado en un recipiente y que está a 800 mmHg de presión, a 67ºC y ocupa un volumen de 84,96 litros.

Cálculo de la masa:

De: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$$\Rightarrow P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{T}$$

$$\therefore \quad m = \frac{P \cdot V \cdot M}{R \cdot T} \qquad \text{(I)}$$

Adecuando los datos:

$P = 800$ mmHg

$T = 67ºC + 273 = 340$ K

$V = 84{,}96$ L

$$M = 44 \frac{g}{mol}$$

$$R = 62{,}4 \frac{mmHg \cdot L}{mol \cdot K}$$

Sustituyendo en (I) los datos adecuados:

$$m = \frac{800 \cdot 84{,}96 \text{ L} \cdot 44 \text{ g/mol}}{62{,}4 \frac{mmHg \cdot L}{mol \cdot K} \cdot 340 \text{ K}} = 140 \text{ g}$$

Pero: $w = m \cdot g$

Luego:

$$w = 140 \text{ g} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = 1{,}37 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s^2}$$

Por lo tanto: $w = 1{,}37$ N de CO_2

HIPÓTESIS DE AVOGRADO Y AMPERE

"En volúmenes iguales de gases distintos que estén a la misma presión y a la misma temperatura existe el mismo número de moléculas".

MEZCLA DE GASES

Es la reunión de dos o más gases en la que cada uno conserva sus características.

LEYES DE DALTÓN

1.- "En una mezcla de gases que ocupa un volumen, la presión total es igual a la suma de las presiones parciales".

$$\boxed{P_T = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}$$

P_T = presión de la mezcla

p = presión parcial de cada gas

2.- "En una mezcla de gases, las presiones parciales son directamente proporcionales al número de moles o número de moléculas".

$$\boxed{\frac{P_T}{n_T} = \frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \frac{p_3}{n_3} + \ldots}$$

P_T = presión total de la mezcla

p = presiones parciales

n_T = total de moles de la mezcla

n = moles de cada gas en la mezcla

Ejemplo:

Se mezcla 3 moles de O_2 y 2 moles de CO_2. La presión total es de 1000 mm de Hg. Calcular la presión parcial de cada gas.

$$\frac{P_T}{n_T} = \frac{p_1}{n_1}$$

de donde:

$$p_1 = n_1 \frac{P_T}{n_T}$$

Sustituyendo los datos:

Para el O_2:

$$pO_2 = 3 \text{ mol} \frac{1000 \text{ mm}}{5 \text{ mol}} = 600 \text{ mm Hg}$$

Para el CO_2:

$$pCO_2 = 2 \text{ mol } \frac{1000 \text{ mm}}{5 \text{ mol}} = 400 \text{ mm Hg}$$

LEY DE AMAGAT

"Cuando se mezcla gases distintos, todos a la misma presión y a la misma temperatura, manteniendo esa misma presión y temperatura al ser mezclados, el volumen de la mezcla es igual a la suma de los volúmenes parciales".

$$V_T = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

NÚMERO DE MOLES, VOLUMEN Y PRESIÓN PARCIALES RELACIONADO EN PORCENTAJE

$$\% \, n_1 = \% \, v_1 = \% \, p_1$$

n_1 = número de moles de uno de los gases en la mezcla.

v_1 = volumen parcial que ocupa uno de los gases.

p_1 = presión parcial que ejerce uno de los gases.

FRACCIÓN MOLAR

Es la relación entre las moles de uno de los gases que hay en la mezcla y el total de moles de la mezcla de gases.

$$fm_1 = \frac{n_1}{n_T}$$

fm_1 = fracción molar.

n_1 = número de moles de uno de los gases en la mezcla.

n_T = número total de las moles que hay en la mezcla.

PESO MOLECULAR DE UNA MEZCLA DE GASES

Para calcular en Pm, se calcula el peso promedio de una mol de mezcla, ya que numéricamente el Pm, y la mol de un gas son iguales.

$$M_m = fm_1 \cdot M_1 + fm_2 \cdot M_2 + \ldots$$

M_m = peso promedio de una mol de la mezcla.

fm_1, fm_2 = fracción molar de cada gas.

M_1, M_2 = valor de la mol de cada gas.

Ejemplo:

Se mezcla 2 mol de He con 5 mol de CH_4. Calcular el Pm promedio.

$$Mm = fm_{He} \cdot M_{He} + fm_{CH4} \cdot M_{CH4} \quad (I)$$

Cálculo de las fracciones molares:

$$n_{He} = 2 \text{ mol}$$

$$n_{CH4} = 5 \text{ mol}$$

Sumando: $n_T = 7$ moles

Sabiendo que: $fm_1 = \frac{n_1}{n_T}$

$$fm_{He} = \frac{2 \text{ mol}}{7 \text{ mol}} = 0{,}2857$$

$$fm_{CH4} = \frac{5 \text{ mol}}{7 \text{ mol}} = 0{,}7143$$

Además: M_{He}= 4g /mol y M_{CH4} = 16gr /mol

Sustituyendo en (I)

$$Mm = 0{,}2857 \cdot 4 \text{ g/mol} + 0{,}7143 \cdot 16 \text{g /mol}$$

$$= 12{,}6716 \frac{g}{mol}$$

numéricamente Mm = Pm

$\therefore$ Pm = 12,6716

GASES HÚMEDOS

GAS HÚMEDO

Es aquel gas que está mezclado con algún vapor (de agua, de gasolina, de éter, de alcohol, etc.). Para calcular la presión del gas húmedo, se aplica la Ley de Daltón:

$$P_H = Pv + Pg$$

Por consiguiente:

$$Pg = P_H - Pv$$

Donde:

Pg = presión del gas (seco).

P_H = presión total del gas húmedo.

P_v = presión del vapor.

HUMEDAD RELATIVA

Se denomina Humedad Relativa al porcentaje de vapor de agua que tiene un gas con respecto a su punto de saturación de vapor.

Cuando el gas está totalmente saturado de vapor de agua la humedad relativa es 100%

$$Hr = \frac{pv}{ps} \cdot 100$$

o:

$$Hr = \frac{w_1}{w_T} \cdot 100$$

Hr = humedad relativa.

pv = presión parcial del vapor de agua a determinada temperatura.

ps = presión parcial del vapor de agua, cuando la mezcla está saturada de vapor, a la misma temperatura.

w_1 = peso de vapor de agua presente en un determinado volumen (llamado también humedad absoluta).

w_T = peso total de vapor de agua necesario para que el volumen de gas anterior llegue a su total saturación.

Ejemplo:

A 20º C la presión de saturación de humedad de un gas es 17.5 mm (este dato está tabulado en los libros), pero al momento de la medida, la presión parcial del vapor es 14 mm. ¿Cuál es la humedad relativa?

$$H.r. = \frac{pv}{ps} \cdot 100 = \frac{14\ mm}{17{,}5\ mm} \cdot 100 = 80\%$$

DETERMINACIÓN DE PESOS ATÓMICOS

1.- Peso atómico aproximado:

MÉTODO DEL M.C.D. o de CANIZZARO

Se determina los pesos del elemento en el peso molecular de dos o más compuestos que contengan dicho elemento; el M.C.D. de estos pesos es el P.a. aproximado del elemento cuyo peso atómico se busca.

2.- Peso atómico exacto:

MÉTODO EL CALOR ESPECÍFICO

Se necesitan conocer las siguientes proposiciones:

a) LEY DE DULONG Y PETIT

$$Pa \cdot Ce = 6{,}4$$

Pa = Peso atómico.

Ce = Calor específico.

b) PESO EQUIVALENTE o EQUIVALENTE GRAMO

Es una porción del elemento, en gramos, que se combina o desplaza 8 g de oxígeno, 1,008 g de hidrógeno, o 35,46 g de cloro. Matemáticamente se calcula así:

$$Eq - g = \frac{A}{V}$$

Eq - g = equivalente-gramo.

A = átomo-gramo del elemento o P.a. expresado en gramos.

V = valencia del elemento.

NOTA.-

Un elemento tiene tantos equivalentes como valencias tenga.

Ejemplo:

$$\text{Eq-g } Fe^{+2} = \frac{56\text{ g}}{2} = 28\text{ g} \qquad \text{Fe (del ferroso)}$$

$$\text{Eq-g } Fe^{+3} = \frac{56\text{ g}}{3} = 28\text{ g} \qquad \text{Fe (del férrico)}$$

LEY DE LA COMBINACIÓN EQUIVALENTE DE LOS ELEMENTOS

"Los pesos de dos elementos que se combina, o son sus equivalentes los que se combina o son proporcionales a estos pesos equivalentes".

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{Eq_1}{Eq_2}$$

W_1 = peso de un elemento que se combina con el peso W_2 de otro elemento.

W_2 = peso del otro elemento que se combina con el peso de W_1 del elemento anterior.

Eq_1 = peso equivalente del elemento 1.

Eq_2 = peso equivalente del elemento 2.

Ejemplo:

5 gramos de un metal se oxida con 1,2 g de oxígeno. ¿Cuál es el equivalente del metal?

PROCEDIMIENTO:

W_M = 5 g

W_{O2} = 1,2 g

Eq-g M = ?

Eq-gO_2 = 8 g

$$\therefore \quad \frac{5\text{g}}{1{,}2\text{ g}} = \frac{\text{Eq-g M}}{8\text{ g}}$$

de donde:

$$\text{Eq M} = 33{,}3\text{ g}$$

LEYES DE LAS COMBINACIONES QUÍMICAS

LEYES PONDERALES

Son las que gobiernan las masas (o los pesos) de los cuerpos que reaccionan y de los cuerpos que resultan. Son 4:

1.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MATERIA o DE LAVOISIER

"La masa de un sistema permanece invariable, cualquiera que sea la transformación que ocurra dentro de él".

2.- LEY DE LAS PROPORCIONES DEFINIDAS o DE PROUST

"Cuando dos o más sustancias se combinan para formar un cuerpo determiando, lo hacen siempre en una proporción fija y constante".

3.- LEY DE LAS PROPORCIONES MÚLTIPLES o DE DALTÓN

"Lo pesos de un elemento, que se combinan con un mismo peso de otro para formar compuestos distintos varían según una relación muy sencilla".

4.- LEY DE LAS PROPORCIONES RECÍPROCAS o DE WENZEL-RITCHER

"Los pesos de dos o más cuerpos que reaccionan con un mismo peso de otro, son los mismos, o sus múltiplos, los que reaccionan entre sí, el caso de ser suceptibles de reaccionar".

LEYES VOLUMÉTRICAS

Son las que regulan o gobiernan los volúmenes de los gases que reaccionan y los volúmenes de los gases producidos.

1.- LEYES VOLUMÉTRICAS o DE GAY-LUSSAC

"En cualquier reacción química, los volúmenes de las sustancias gaseosas que reaccionan y los volúmenes de las sustancias gaseosas producidas, están relacionados por números enteros sencillos y constantes".

CONTRACCIÓN

En una reacción química, es la disminución que experimentan los volúmenes de las sustancias gaseosas que reaccionan".

$$N_2 + 3H_3 \rightarrow 2\,NH_3 \qquad (1)$$

1 vol 3 vol 2 vol

$$C = \frac{s - v}{s}$$

C = contracción.

s = suma de volúmenes gaseosos reactantes.

v = suma de volúmenes gaseosos que resultan.

Ejemplo:

Para la ecuación (1):

$$C = \frac{4 - 2}{4} = \frac{1}{2}$$

EL ESTADO LÍQUIDO

SOLUCIONES

SOLUCIÓN

Mezcla homogénea de dos sustancias, en la que una es el "solvente" y la otra es el "soluto".

SOLVENTE

Sustancia en la cual se disuelve otra sustancia (generalmente es el agua).

SOLUTO

Sustancia que se disuelve en el solvente.

Solución = solvente + soluto

CONCENTRACIÓN

La concentración de una solución es la que indica la "cantidad relativa" de soluto que hay en una solución.

FORMAS DE EXPRESAR LA CONCENTRACIÓN

FORMAS FÍSICAS

1.- EL PORCENTAJE POR PESO:

$$\%\text{ de soluto} = \frac{\text{peso soluto}}{\text{peso solución}} \cdot 100$$

Ejemplo:

Se disuelve 3 gramos de sal en 12 g de agua. ¿Cuál es la composición porcentual?

$$\%\text{ de sal por peso} = \frac{3\text{ g}}{3\text{ g} + 12\text{ g}} \cdot 100 = 20\%$$

2.- GRADOS BAUME

Es una forma de medir las concentraciones de las soluciones líquidas de acuerdo a su densidad.

La escala de Baumé es una escala de densidades que toma como puntos de referencia la densidad de agua pura y la densidad de una solución de NaCl al 10%.

Para líquidos más densos que el agua, la densidad del agua es 0º Bé y la densidad de la solución de NaCl al 10% corresponde a 10º Bé.

Para líquidos menos densos que el agua, por ejemplo: soluciones de gases en agua, la densidad de la solución de NaCl al 10% corresponde a 0º Bé y la del agua pura corresponde a 10º Be.

Por eso, hay densímetros Bé para líquidos más densos que el agua y otros para líquidos menos densos.

Para líquidos más densos que el agua:

$$n = 145 - \frac{145}{p \cdot e}$$

Para líquidos menos densos que el agua:

$$n = \frac{140}{p \cdot e} - 130$$

n = ºBé

p.e. = peso específico de la solución.

EQUIVALENTE-GRAMO (Eq-g) DE COMPUESTOS

a.- De un ácido:

$$Eq - gA = \frac{M}{\#H^+}$$

$\#H^+$ = número de hidrógenos iónicos que contiene la molécula de ácido.

b.- De una base:

$$Eq - gB = \frac{M}{\#(OH)^-}$$

$(OH)^-$ = número de grupos oxhidrilo iónico que contiene la molécula de la base.

> NOTA.-
>
> La equivalencia se manifiesta en una reacción y está dada por el número de H^+ o OH^- de una molécula que han sido sustituídos, según sea ácido o base.

c.- De una sal:

Se da con respecto a uno de los elementos o a uno de los iones que constituyen la sal.

$$Eq - g\,S = \frac{M}{\text{número Eq - g del elemento o radical}}$$

Ejemplo:

Calcular el equivalente del KAI $(SO_4)_2$

Con respecto al K^+, Al^{+3} y $(SO_4)^{-2}_2$

$$Eq - g_{K+} = \frac{258\ g}{1} = 258\ g \text{ de } KAI(SO_4)_2$$

$$Eq - g_{Al+3} = \frac{258\ g}{3} = 86\ g \text{ de } KAI(SO_4)_2$$

$$(SO^4)^{-2}_2 = \frac{258\ g}{4} = 64{,}5\ g \text{ de } (SO_4)_2$$

MILI-VALENTE

Es la milésima parte de un equivalente.

FRACCIÓN MOLAR EN UNA SOLUCIÓN

Es la proporción de moles de soluto o solvente que hay en una solución, o en otras palabras es el "tanto por uno" de soluto o solvente en la solución.

$$fm_1 = \frac{n_1}{n_T}$$

fm_1 = fracción molar del soluto o solvente (según)

n_1 = número de moles de soluto o solvente (según)

n_T = número total de moles de la solución.

FORMAS QUÍMICAS PARA MEDIR LA CONCENTRACIÓN DE LAS SOLUCIONES

1.- MOLARIDAD

Está dada por el número que indica el número de moles de soluto que habría en 1 litro de solución.

$$\text{Molaridad} = \frac{\#\text{Moles soluto}}{\#\text{Litros solución}}$$

o:

$$C_M = \frac{n}{V}$$

Ejemplo:

Se disuelve 20 gramos de NaCl en 110 cm^3 de solución. ¿Cuál es la concentración molar de la solución?

Se sabe que:

$$C_M = \frac{n}{V} \qquad (I)$$

Donde:

$$n = \frac{w}{M} = \frac{20\ g}{58{,}5\ g/mol} = 0{,}341\ mol$$

$V = 110\ cm^3 = 0{,}110\ L$

Sustituyendo en (I):

$$C_M = \frac{0{,}341\ mol}{0{,}110\ L} = 3{,}1\ \frac{mol}{L}$$

∴ Concentración Molar = 3,1 M

2.- MOLARIDAD

Está dada por un número que indica el número de moles de soluto que habría en 1 kg de solvente.

$$\text{Molalidad} = \frac{\#\text{Moles soluto}}{\#\text{Kg solvente}}$$

o:

$$C_M = \frac{n}{W}$$

Ejemplo:

Se disuelve 20 g de NaCL en 100 g de agua. Calcular la concentración molal de la solución.

Donde:

$$n = \frac{w}{M} = \frac{20\ g}{58{,}5\ g/mol} = 0{,}341\ mol$$

$w = 100\ g = 0{,}100\ kg$

Sustituyendo en la fórmula:

$$C_m = \frac{0{,}341\ mol}{0{,}100\ kg} = 3{,}41\ \frac{mol}{kg}$$

∴ Concentración Molal = 3,41 m

3.- NORMALIDAD

Está dada por un número que indica el número de equivalentes gramo del soluto que habría en 1 litro de solución.

$$\text{Normalidad} = \frac{\#\text{Eq - g soluto}}{\#\text{lit solución}}$$

o:

$$C_N = \frac{\#\ \text{Eq-g}}{V}$$

Ejemplo:

Se disuelve 30 gramos de $Ca(OH)_2$ en 120 cm^3 de solución. Calcular la concentración normal de la solución.

$$\#\ \text{Eq - g} = \frac{w}{\text{Eq - g}} = \frac{30\ g}{37\ g/eq\text{-}g} = 0{,}81\ eq\text{ - }g$$

$V = 120\ cm^3 = 0{,}120\ L$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{0{,}81\ eq\text{ - }g}{0{,}120\ L} = 6{,}75\ \frac{eq\text{ - }g}{L}$$

Concentración Normal = 6,75 N

DILUCIÓN Y AUMENTO DE LA CONCENTRACIÖN

Cuando a una solución se añade solvente la solución se **diluye**, es decir **baja** la concentración.

Cuando de alguna manera se le extrae solvente; es decir, se le disminuye el solvente, la solución se **concentra**, **sube** su concentración.

En todo caso, se cumple la siguiente propiedad:

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

C_1 = concentración de la solución al principio.

V_1 = volumen de la solución al principio.

C_2 = concentración de la solución al final.

V_2 = volumen de la solución final.

DETERMINACIÓN DE PESOS MOLECULARES

MÉTODO GASOMÉTRICO

Este método se usa para sustancias gaseosas, y si no lo es, previamente se transforma en gas.

Como la "mol" de cualquier sustancia, y el "peso molecular" son numéricamente iguales, lo que se determina es el peso de la mol y de ahí se infiere el P.m. Puede calcularse de las siguientes maneras:

a) Basado en la ecuación general de los gases:

$$M = \frac{m \cdot R \cdot T}{P \cdot V} \qquad \text{(I)}$$

b) Conociendo la densidad relativa del gas con respecto al aire (Dr):

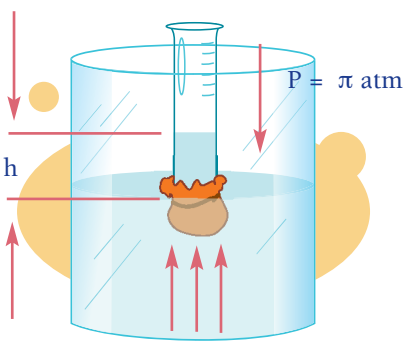
$$P.m. = 28{,}96 \cdot Dr \qquad \text{(II)}$$

c) Conociendo la densidad del gas en C.N. (Dn):

$$M = 22{,}4 \frac{L}{Mol} \cdot Dn \qquad \text{(III)}$$

MÉTODO OSMÓTICO

Se funda en el fenómeno de la ósmosis y se usa para calcular pesos moleculares de sólidos y líquidos disolviendo en un disolvente líquido.



$$\pi \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

$$M = \frac{m \cdot R \cdot T}{\pi \cdot V} \qquad \text{(I)}$$

M = masa de una mol de soluto, en "g/mol".

M = masa de soluto disuelto, en "g".

R = constante de los gases 0,082.

T = temperatura absoluta de la solución, en "K".

π = presión en atmósfera, ejercido por la columna de altura "h", en "atm".

V = volumen de la solución en litros.

Ejemplo:

Se disuelve 3 gramos de una sustancia en 150 cm^3 de una solución, se deposita en un tubo de prueba de base semipermeable y se introduce dentro de otro recipiente mayor que contiene el disolvente; después de unos minutos el nivel de la solución, en el tubo, sube 2 cm. Si la temperatura del sistema es 27°C y la densidad de la solución al final 2,1 g/cm^3, calcular el P.m. del soluto.

Adecuando los datos:

$m = 3\ g$

$$R = 0{,}082 \frac{Atm \cdot L}{mol \cdot K}$$

$T = 27° + 173 = 300\ K$

$$\pi = H \cdot \delta = 2\ cm \cdot 2{,}1 \frac{g}{cm^3} = 4{,}2 \frac{g}{cm^2}$$

$$= 4{,}2 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{cm^2}$$

$$\pi = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{1{,}033}\ atm = 4{,}066\ atm$$

$V = 150\ cm^3 = 0{,}150\ L$

Sustituyendo en la fórmula (I):

$$M = \frac{3g \cdot 0{,}082 \dfrac{Atm \cdot L}{mol \cdot K} \cdot 300°K}{4{,}066\ atm \cdot 0{,}150\ atm} = 121 \frac{g}{mol}$$

∴ P.m. = 121

MÉTODO EBULLOSCÓPICO

Se funda en el aumento que experimenta el punto de ebullición de un líquido cuando contiene alguna sustancia en solución. Sirve para calcular pesos moleculares de sólidos y líquidos disolviéndolos en un líquido.

$$M = K_e \frac{m \cdot 100}{W \cdot E}$$

M = masa de una mol de soluto, en "g/mol".

K_e = constante ebulloscópica propia de cada disolvente.

m = masa del soluto, en gramos, disuelto.

W= masa del solvente, en gramos.

E = ascenso ebulloscópico, es decir diferencia entre el punto de ebullición de la solución y el solvente puro.

Ejemplo:

Se disuelve 3 gramos de un cuerpo en 30 gramos de agua. Si la constante ebulloscópica del agua es 0,52 y el ascenso ebulloscópico de la solución es 0,78. ¿Cuál es el peso molecular del cuerpo disuelto?

$$M = 0{,}52\ °C \frac{3\ g \cdot 100}{30\ g \cdot 0{,}78\ °C} = 66{,}67\ g/mol$$

∴ P.m. = 66,67

MÉTODO CRIOSCÓPICO

Se basa en el descenso que experimenta el punto de congelación de una solución comparado con el punto de congelación del solvente puro:

$$M = K_c \frac{m \cdot 100}{W \cdot C}$$

M = masa de una mol del soluto.

K_e = constante crioscópica propia de cada líquido.

m = masa disuelta de soluto, en gramos.

W= masa del disolvente, en gramos.

C = descenso del punto de cristalización del solvente.

Ejemplo:

Se disuelve 4 gramos de una sustancia en 40 gramos de benceno y el punto de congelación de esta solución es 5,2 °C menor que el punto de congelación del benceno puro. Si la constante crioscópica del benceno es 4,9°C, calcular el P.m. del soluto.

$$M = K_e \frac{m \cdot 100}{W \cdot C} = 4{,}9\ °C \frac{4\ g \cdot 1000}{40\ g \cdot 5{,}2°C} = 94{,}23\ g/mol$$

∴ P.m. = 94,23

TERMOQUÍMICA

DEFINICIÓN Y CONCEPTOS

Es la parte de la química que estudia la energía calorífica (producida o consumida) que acompaña a todo proceso químico.

La cantidad de calor que produce o consume un proceso químico se mide en **calorías** o **joule**, muy poco en Btu.

CALOR DE REACCIÓN

Es el calor que entra en juego en una reacción cuando la transformación se hace a temperatura y presión constantes.

CALOR DE FORMACIÓN

Es la cantidad de calor que absorbe o exhala en la formación de **una mol** de sustancia, por síntesis.

CALOR DE COMBUSTIÓN

Es el calor desprendido en la combustión total de **una mol** de una sustancia cualquiera.

LEY DE HESS

"La cantidad de calor que intervienen en una reacción química, es la misma, así la reacción se realice en una o varias etapas".

EQUIVALENCIA DE UNIDADES		
1 caloría	=	0,00396 B.t.u.
1 B.t.u.	=	252 calorías
1 kilo cal	=	1000 calorías
1 joule	=	0,24 cal
1 cal	=	4,186 J

DEFINICIÓN DE LAS UNIDADES CALORIMÉTRICAS

CALORÍA

Es una unidad para medir la cantidad de calor: "Es la cantidad de calor que absorve o que necesita 1 gramo de agua líquida pura, para subir su temperatura en 1°C (de 15°C a 16°C)".

B.T.U. (British Terminal United)

Es una unidad inglesa para medir la cantidad de calor: "Es la cantidad de calor que absorbe o que necesita 1 libra de agua líquida pura para subir su temperatura en 1°F.

CALOR GANADO O PERDIDO "q" CUANDO VARÍA LA TEMPERATURA

1.- Cuando la temperatura aumenta (gana):

$$g = m \cdot C.E. \cdot (tf - ti)$$

2.- Cuando su temperatura disminuye (pierde):

$$q = m \cdot C.e. \cdot (ti - tf)$$

q = cantidad de calor ganado o perdido.

m = masa del cuerpo que modifica su temperatura.

C.e. = calor específico del cuerpo.

Ti = temperatura inicial.

Tf = temperatura al final.

EQUILIBRIO QUÍMICO

Es un estado en el cual la velocidad de reacción de los cuerpos reactantes es igual a la velocidad de reacción de los productos para reproducir los reactantes.

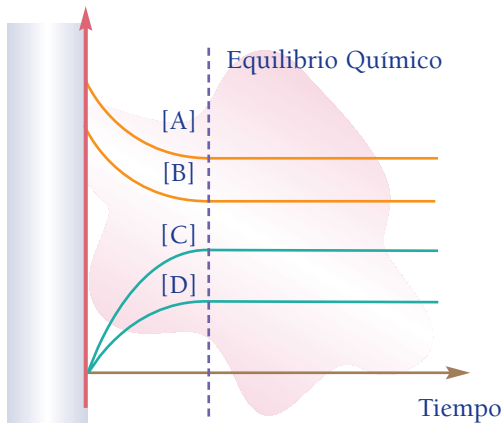
Sea la reacción:

$$A + B \rightleftharpoons C + D$$

El equilibrio químico en una reacción se produce a partir del momento en que las concentraciones de los reactantes y de los productos se mantiene constante.

[A], [B] : concentraciones de A y B al momento del equilibrio.

[C], [D] : concentraciones de C y D al momento del equilibrio.



FACTORES QUE AFECTAN LA VELOCIDAD DE LA REACCIÓN PARA LLEGAR AL EQUILIBRIO QUÍMICO

a.- Naturaleza de las sustancias que reaccionan.

b.- Temperatura.

c.- Agentes catalizadores.

d.- Concentración y presión.

REACCIONES REVERSIBLES

Son aquellos en las que los productos originados pueden reaccionar entre sí, para regenerar los productos primitivos.

REACCIONES IRREVERSIBLES

Son aquellas en las que los productos originados no reaccionan entre sí para regenerar los primitivos.

LEY DE GULBERG Y WAAGE O DE LA ACCIÓN DE LAS MASAS

"La velocidad de reacción es proporcional a la concentración de los reactantes".

Constante de concentración Kc:

$$Kc = \frac{[C]^c\ [D]^d}{[A]^a\ [B]^b}$$

Kc = constante de equilibrio por concentración.

a, b, c, d, coeficientes de las sustancias A, B, C, D. en una reacción química así:

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

CONSTANTE DE EQUILIBRIO DE IONIZACIÓN Ki

Los ácidos disueltos en agua se ionizan en iones H^+ y radicales halogénicos A^-. La constante Ki de ionización se calcula igual que Kc.

Ejemplo: $H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO^=_4$

$$Ki = \frac{[H^+]^2\ [SO_4^=]}{[H_2SO_4]}$$

CONSTANTE DE EQUILIBRO DE PRESIÓN PARCIAL Kp

En la mayor parte de sistemas gasesoso es convenientes expresar la concentración de los gases en términos de la presión parcial.

Ejemplo: $nA + mB \rightarrow sC + qD$

$$Kp = \frac{[P_C]^s\ [P_D]^q}{[P_A]^n\ [P_B]^m}$$

p_A, p_B, p_C, p_D, presiones parciales de los gases A, B, C, D.

RELACIÓN ENTRE K_p y K_c

Sea la reacción gaseosa:

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

$$Kp = Kc\ (RT)^{\Delta n}$$

Donde: $\Delta n = (c + d) - (a + b)$

LEY DE VAN´T HOFF

"Cuando se aumenta la temperatura de un sistema en equilibrio, éste se desplaza en el sentido en que absorbe calor".

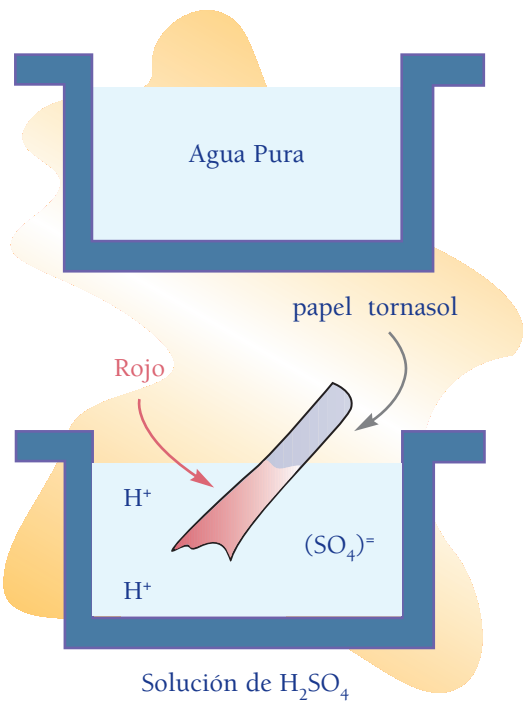
LEY DE CHATELIER

Es más general que la de Van´t Hoff: "Los sistemas en equilibrio reaccionan tendiendo a reducir al mínimo el efecto de un cambio externo impuesto al sistema".

ÁCIDOS Y BASES

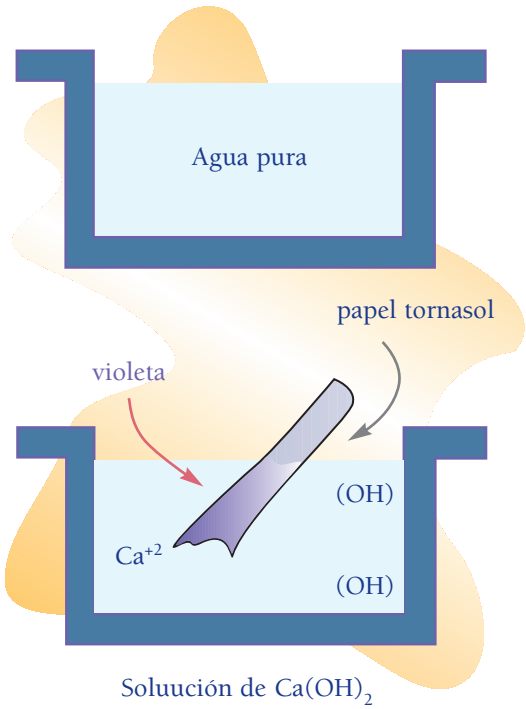
ÁCIDOS

Son aquellas sustancias que al disolverse en agua se ionizan, uno de cuyos iones siempre es el ión H^+ o "protio", el cual **enrojece** al papel tornasol.



BASES

Son aquellas sustancias que al disolverse en agua se ionizan, uno de cuyos iones es el ión (OH)- llamado ixhidrilo, que colorea de **azul violeta** al papel tornasol.



ÁCIDOS Y BASES FUERTES

Son aquellos ácidos o bases que al disolverse en agua se ionizan en un alto porcentaje.

ÁCIDOS Y BASES DÉBILES

Son aquellos ácidos o bases que al disolverse en agua se ionizan en un bajo porcentaje.

Así, por ejemplo:

> HCI (ácido clorhídrico) es un ácido fuerte porque al disolverse en agua, un alto porcentaje está disociado en iones H^+ y Cl^-; mientras que CH_3 — COOH (ácido acético) es un ácido débil porque sólo un bajo porcentaje del CH_3 — COOH se ha disociado en iones H^+ y CH_3COO-.

CONSTANTE DE IONIZACIÓN DEL AGUA (Kw)

El agua es el más débil de los ácidos y el más fuerte de las bases.

Se ioniza así:

$$H_2O \rightarrow H^+ + OH^-$$

La concentración de:

$$[H^+] = 1{,}0 \,.\, 10^{-7} \text{ ión-g/L}$$

La concentración de:

$$[\,OH^-\,] = 1{,}0 \,.\, 10^{-7} \text{ ión-g/L}$$

$$\therefore \quad \boxed{Kw = 1{,}0 \,.\, 10^{-14} \text{ ión-g/L}}$$

TIPOS DE SOLUCIONES

SOLUCIÓN NEUTRA:

$$[H^+] = [OH^-] = 1{,}0 \,.\, 10^{-7} \text{ ión-g/L}$$

SOLUCIÓN ÁCIDA:

Cuando:

$$[H^+] > [OH^-]$$

SOLUCIÓN BÁSICA:

Cuando:

$$[H^+] < [OH^-]$$

CONCEPTO DE "pH"

El "pH" es una manera de expresar la concentración de los iones H^+ en una solución. Se expresa por el logaritmo vulgar de la inversa de la concentración del H^+.

La concentración $[H^+]$ del H^+ se expresa en ión-g/L o átomo-g/L:

$$\boxed{pH = \log \frac{1}{[H^+]}}$$

ELECTRO-QUÍMICA

Es el estudio de las **reacciones químicas producidas** por la acción de la corriente eléctrica y también es el estudio de las **reacciones químicas que producen** corriente eléctrica.

Algunas unidades eléctricas.

UNIDAD DE MASA

COULOMB

Es la cantidad de masa eléctrica que se necesita para depositar 0,00118 gr de Ag en un proceso electrolítico.

1 coulombio <> $6{,}25 \cdot 10^{18}$ electrones

FARADAY

Es una unidad mayor de masa eléctrica, equivale a 96 500 coulombs, es la cantidad de masa eléctrica que al circular en un proceso electrolítico, deposita 1 Equivalente gramo de sustancia en los electrodos.

1 faraday <> $0{,}623 \cdot 10^{23}$ electrones

1 faraday <> $9{,}65 \cdot 10^{4}$ coulombio

ELECTRO-EQUIVALENTE

Es la cantidad de sustancia depositada en un electrodo por un coulomb de corriente, en un proceso electrolítico.

Por ejemplo:

0,00118 g Aag es el electroequivalente de la plata porque es depositado por un coulomb.

UNIDADES DE INTENSIDAD

AMPERE

Es una unidad para medir la frecuencia o intensidad con que se desplaza la corriente, equivale al desplazamiento de 1 coulombio en 1 segundo.

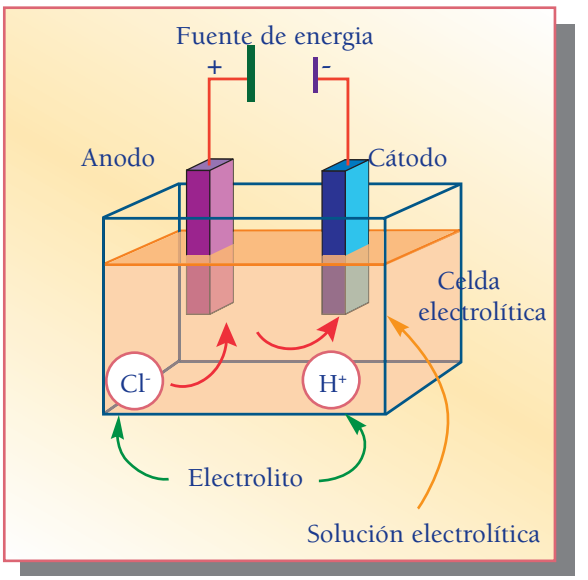
$$\text{Ampere} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ segundo}}$$

o:

$$I = \frac{q}{t}$$

ELECTRÓLISIS

Es el fenómeno de la descomposición química de una sustancia disuelta (electrolito), generalmente en el agua, por la acción del paso de la corriente eléctrica.



LEYES DE FARADAY

1.- "La cantidad de sustancia depositada en un electrodo es proporcional a la cantidad de corriente que circula por una solución".

$$W = \alpha\, q$$

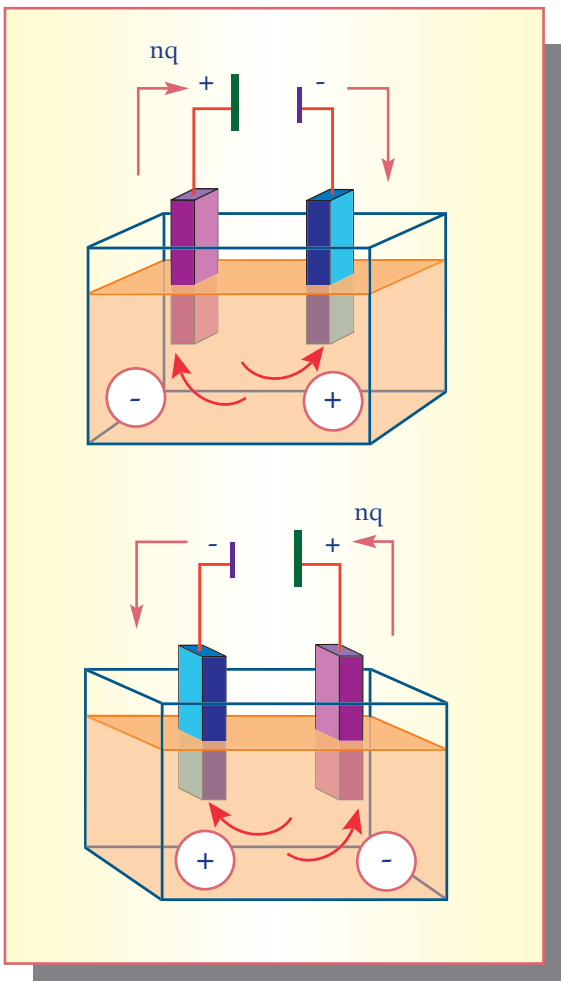
W = peso de sustancia que se libera o que se deposita en los electrodos.

α = constante propia de cada sustancia que se va a descomponer y que depende de su equivalente-gramo.

q = cantidad de corriente que circula.

2.- "Las cantidades de sustancias distintas depositadas en los electrodos, de procesos distintos, por la misma cantidad de corriente, son proporcionales a sus pesos equivalentes".

$$\frac{Wa}{Wb} = \frac{Eq\ a}{Eq\ b}$$



QUÍMICA ORGÁNICA

BREVES NOCIONES y NOMENCLATURA

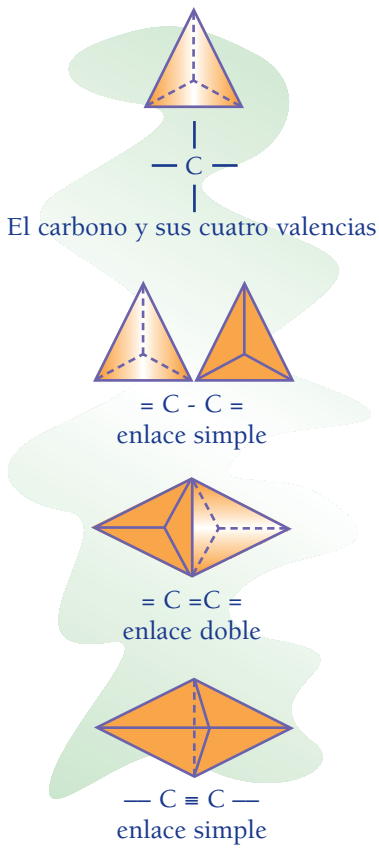
OBJETIVO DE LA QUÍMICA ORGÁNICA

Es estudiar los derivados del carbono.

CARÁCTERÍSTICAS RESALTANTES DEL CARBONO

1.- El carbono es tetravalente. Se le representa por un tetraedro regular.

2.- Los átomos de carbono pueden unirse entre ellos por enlace simple, doble y triple.



DIVISIÓN DE LA QUÍMICA ORGÁNICA

La función orgánica que se estudia en Química Orgánica se divide en dos grandes series: ACICLÍCA y CICLÍCA.

SERIE ACÍCLICA

Son compuestos orgánicos de cadena abierta. Se clasifican en SATURADOS y NO SATURADOS.

FUNCIONES QUÍMICAS

Se llama así a un conjunto de propiedades análogas a un grupo de compuestos.

En la Química Orgánica se puede definir y clasificar las siguientes funciones:

FUNCIÓN PRINCIPAL

Constituída por H y C; de ésta, derivan otras.

1) Saturadas
2) No saturadas
   - Enlace doble
   - Enlace triple

FUNCIONES FUNDAMENTALES

Alcohol

Aldehíbido

Cetona

Äcido

FUNCIONES ESPECIALES

Eter

Ester

Sal orgánica

Amina

Amida

Nitrito

Cianuro

FUNCIÓN HIDROCARBURO

Son compuestos que constan sólo de C e H. Es la función más sencilla pero a la vez la más importante. Los grupos característicos son:

$-CH_3$	$= CH_2$
Grupo funcional Primario Monovalente	Grupo funcional secundario divalente

$\equiv CH$

Grupo funcional terciario, trivalente.

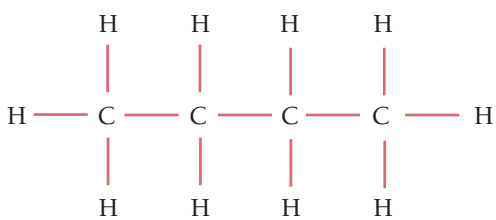
A) FUNCIONES PRINCIPALES

Constituídos sólo por Carbonos e Hidrógenos.

1.- SERIE SATURADA O ALKANA

Son hidrocarburos de cadena abierta con un solo enlace entre carbonos.

Ejemplo:



o:

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra con la palabra griega que indica el número de carbonos de la cadena principal y se le hace terminar en ANO".

Los 4 primeros componentes de esta serie tienen nombres especiales, con los cuales son más conocidos:

CH_4 : Metano o protano

$CH_3 - CH_3$: Etano o deutano

$CH_3 - CH_2 - CH_3$: Propano o tritano

$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$: Butano o tetrano

$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3$: pentano

$CH_3 - (CH_2)_4 - CH_3$: exano

$CH_3 - (CH_2)_5 - CH_3$: heptano

Etc.

Los 4 primeros hidrocarburos; es decir, hasta el C_4, son gaseoso. Del C_5 al C_{17} son líquidos, del C_{18} en adelante son sólidos.

Fórmula general:

$$C_nH_{2n+2}$$

n: 1, 2, 3, …

RADICALES HIDROCARBUROS O RADICALES ALCOHÓLICOS

Son aquellos que resultan al quitarle un "H" a un hidrocarburo saturado (o quitar un "OH" a un alcohol mono alcohol, lo que se verá más adelante).

Ejemplo:

$$CH_3 - CH_3$$

Si se quita H resulta en:

$$CH_3 - CH_2 -$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra cambiando la terminación ANO del hidrocarburo (o la terminación OL del alcohol), por la terminación IL o ILO".

Ejemplos:

HCH_3 origina el CH_3- metlL

CH_3-CH_3 origina el CH_3-CH_2- etlL

$CH_3-CH_2-CH_3$ origina el $CH_3-CH_2-CH_2-$ proplL

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3$ origina el $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-$ butlL

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$ origina el $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-$ pentlL

HIDROCARBUROS SATURADOS CON RAMIFICACIONES

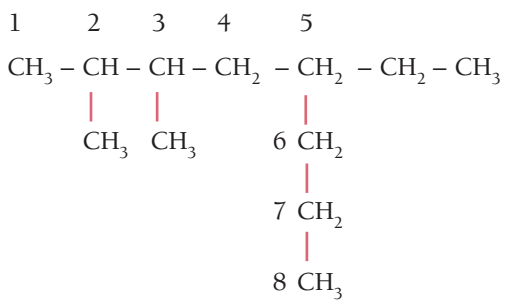
Son aquellos que tienen cadenas laterales conformadas por radicales hidrocarburos.

NOMENCLATURA

"Se numera el hidrocarburo, eligiendo como cadena principal la cadena más larga, la cual puede ser toda horizontal, toda vertical o quebrada, empezando por el lado más cercano a la cadena lateral; luego, se nombra los radicales, indicando el número de carbonos donde están enlazados, luego se lee el nombre del hidrocarburo principal".

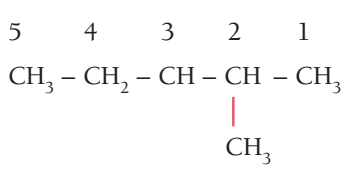
Ejemplos:

i)



Dimetil – 2 . 3 – etil – 5 – octano

ii)



Metil – 2 – pentano

2.- SERIE NO SATURADA

Son aquellos hidrocarburos cuyos carbones están unidos por dos o tres enlaces.

ALQUENOS O HIDROCARBUROS CON ENLACE DOBLE

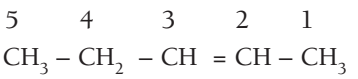
Llamados también etilénicos, olefinos o alquenos. Son aquellos en cuya cadena principal hay uno o más carbonos unidos por enlaces dobles.

NOMENCLATURA

"Se les nombra con la palabra griega que indica el número de carbonos que tiene la cadena principal, haciendo terminar en ENO, precedida esta terminación por di, tri, etc., según el número de enlaces dobles que tenga la cadena principal, ubicando con una numeración adecuada que empiece por el extremo más cercano al enlace doble".

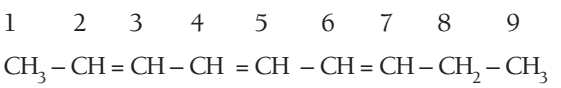
Ejemplos:

i)



Pent – ENO – 2

ii)



Nona – TRI – ENO – 2 . 4 . 6

Fórmula general cuando el hidrocarburo tiene un solo enlace doble:

$$C_nH_{2n}$$

ALQUINOS O HIDROCARBURO DE ENLACE TRIPLE

Llamados también acetilénicos o alquinos. Son aquellos hidrocarburos en los cuales algunos de sus carbonos, de la cadena principal, están unidos por enlaces triples.

NOMENCLATURA

"Se les nombra con la palabra griega que indica el número de carbonos de la cadena principal seguido de la terminación INO, interponiendo la palabra di, tri, etc., para indicar el número de veces que se repite el enlace triple; finalmente, se ubica los enlaces triples con números de los carbonos de menor numeración de la cadena principal".

Ejemplos:

i)

7 6 5 4 3 2 1

$CH_3 - CH_2 - C \equiv C = CH_2 - C \equiv CH$

Hepta di – INO – 1.4

ii)

5 4 3 2 1

$CH_3 - CH_2 - C \equiv C - CH_3$

Penta – INO – 2

Fórmula general válida cuando hay un solo enlace triple:

$$C_nH_{2n-2}$$

HIDROCARBUROS NO SATURADOS CON CADENAS LATERALES

Son aquellos que tienen cadena lateral, designándose como cadena principal la que tiene enlace doble o triple.

NOMENCLATURA

"Primero se elige la cadena principal, se numera sus carbonos. Luego, se nombra los radicales empezando por los más simples, indicando su ubicación con la numeración de la cadena principal, finalmente se lee la cadena principal".

Ejemplo:

i)

1 2 3 4 5 6 7 8

$CH \equiv CH - CH - CH_2 - CH - CH = CH - CH_3$

CH_3 CH_3

Di – metil – 3.5 – octa – eno.6 – ino. 1

ii)

9 8 7 6 5 4 3 2 1

$CH - CH - CH - CH - C \equiv C - C = C = CH_2$

CH_2 CH_2

CH_2 CH_2

CH_3 CH_2

CH_3

Propil. 8 – butil.3 – Nona – di – eno. 1.2 – ino.4

B) FUNCIONES FUNDAMENTALES

FUNCIÓN ALCOHOL

Resulta de la sustitución, en la función hidrocarburo, de un H por un radical OH. Como la sustitución puede hacerse en un grupo hidrocarburo primario, secundario o terciario, el alcohol resultante será primario, secundario o terciario, cuyos grupos funcionales son;

$- CH_2OH$

$= CHOH$ $\equiv COH$

NOMENCLATURA

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina, haciendo terminar el OL, precedida esta terminación de di, tri, etc., según las veces que se repite el grupo OH".

Ejemplos:

i) $CH_3 - CH_2OH$

etanol

ii) $CH_3 - CHOH - CH_3$

Propanol – 2

iii) $CH_2OH - CH_2 - CHOH$

Propano – di – ol – 1 . 3

iv) $CH_2OH - CHOH - CH_2OH$

Propano – tri – ol o glicerina

v)

$$\begin{array}{cccccccc} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ CH \equiv & C - & CHOH & - CH & - CH & = C & - COH & = CH_2 \\ & & & | & & | & & \\ & & & C_2H_5 & & C_2H_5 & & \end{array}$$

Di – etil.3.5-OL.2.6 – Octa – di – eno.1.3 – ino.7

FUNCIÓN ALDEHÍDO

Resulta de la sustitución de 2H de un hidrocarburo del grupo funcional primario ($-CH_3$) por un O. El grupo característico es:

$$\boxed{-CHO}$$

o:

$$-C \begin{array}{l} \diagup\!\!\diagup O \\ \diagdown H \end{array}$$

NOTA:

No confundir con el alcohol terciario ($\equiv$ COH)

NOMENCLATURA

"Se le nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina, haciendo terminar en AL".

Ejemplo:

i) $CHO - CH_2 - CH_3$

Propan – al

ii) $CHO - CH_3$

Etan – al

iii)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ CHO - & C & \equiv C - & CH & - CH & = CH & - CHO \\ & & & | & & & \\ & & & CH_3 & & & \end{array}$$

Metil.4 – hepta – eno.5 – ino.2 – di – al.1.7

FUNCIÓN CETONA

Resulta de sustituir 2H del grupo funcional secundario ($=CH_2$) por un O. El grupo funcional característico es:

$$\boxed{= CO}$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina, haciendo terminar en ONA".

i) $CH_3 - CO - CH_3$

Propan - ona

ii) $CH_3 - CO - CO - CH_3$

Buta – di – ona

iii)

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ CH_3 - & CO - & CH & - CH_2 - & CO - & CH = & CH_2 \\ & & | & & & & \\ & & CH_2 & & & & \\ & & | & & & & \\ & & CH_3 & & & & \end{array}$$

Etil 5 – hepta – eno.1 – di-ona.3.6

FUNCIÓN ÁCIDO

Resulta de la sustitución del grupo funcional primario ($-CH_3$), 2H por un O y otro H por un OH. El grupo funcional característico se llama carboxílico y es:

$$\boxed{-\ COOH}$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina, haciendo terminar en OICO".

Ejemplos:

i) HCOOH

Metan - oico

ii) $COOH - CH_3$

Etan-oico

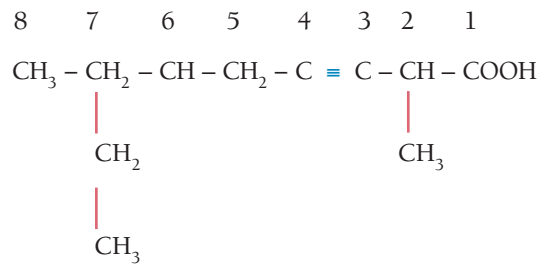
iii) $COOH - CH_2 - COOH$

Propano – di - oico

iv) $COOH - CH_2 - CH_2 - CH_3$

Butan – oico

v)



Metil.2 – etil.6 – octa – ino.3-oico.1

RADICALES ORGÁNICOS

RADICAL ALCOHOLICO O RADICAL DE HIDROCARBURO SATURADO

Es aquel que resulta al quitarle el grupo OH al alcohol o el H a un hidrocarburo saturado.

NOMENCLATURA.-

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina, cambiando la terminación ONA del hidrocarburo, u OL del alcohol, por la terminación IL o ILO".

Ejemplos:

i) HCH_3 original el $-CH_3$ met-il.

ii) $CH_3 - CH_2 - CH_2$ -
Propil

iii) $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2$
Butil

Fórmula general:

$$C_nH_{2n+1}$$

RADICALES DE HIDROCARBUROS NO SATURADOS

Resultan de quitarle 1 H al hidrocarburo

NOMENCLATURA.-

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina haciendo terminar en ILO".

Ejemplos:

i) $CH_2 = CH_2$ origina el $CH_2 - CH -$ etenilo.

ii)

4 3 2 1

$CH_3 - CH_2 - CH = CH$ -

Buteno.1 – il -1

iii)

1 2 3 4 5 6

$CH \equiv C - CH = C = CH - CH_2 -$

Exa – di – eno.3.4 – ino.1-il.6

Es necesario indicar la posición del enlace libre, porque con los ejemplos anteriores puede suceder lo siguiente:

[(de *ii*)]

4 3 2 1

$- CH_2 - CH_2 - CH = CH_2$

Buteno.1 – il – 4

[(de *iii*)]

1 2 3 4 5 6

$- C \equiv C - CH = C = CH - CH_3$

Exa – di – eno.3.4 – ino.1-il.1

RADICALES ÁCIDOS

Resulta de quitarle un OH al grupo carboxílico (-COOH) del ácido orgánico.

NOMENCLATURA.-

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que lo origina, añadiendo la terminaciòn ILO".

Ejemplos:

i) $CH_3 - CO -$
Etano-ilo

ii) $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CO -$
Butano-ilo

iii)

1 2 3 4 5 6

$CH_2 = CH - CH - CH = CH - CO$ -

$|$

CH_2

$|$

CH_3

Etil.3 – exa – di – eno.1.4 – ilo.6

C) FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIÓN ÉTER

Resulta de quitar (deshidratar) una molécula de agua a dos moléculas de alcohol.

$$2(CH_3 - CH_2OH) - H_2O \rightarrow C_2H_5 - O - C_2H_5$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra interponiendo la palabra OXI a los nombres de los hidrocarburos que originan los alcoholes".

Ejemplos:

i) $CH_3 - CH_2 - O - CH_3$

Etano oxi-metano

ii) $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - O - CH_2 - CH_3$

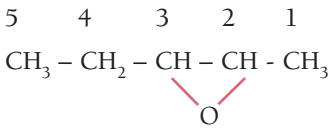
Butano-oxi-etano

NOMENCLATURA ESPECIAL

Cuando el grupo funcional éter (–O–) une los átomos de carbono de una misma cadena, se le antepone el prefijo EPOXI, indicando con numeración los carbonos donde está injertado el radical –O–, seguido del nombre el hidrocarburo.

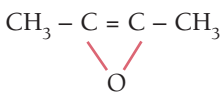
Ejemplos:

i)



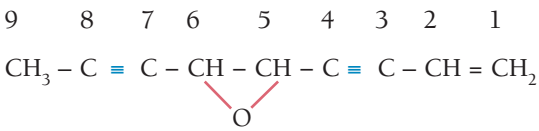
Epoxi.2.3 - pentano

ii)



Epoxi.2.3 – buteno.2

iii)



Epoxi.5.6 – nona - eno - 1 – di – ino.3.7

FUNCIÓN ÉSTER

Resulta de sustituir el (H^+) del ácido orgánico o mineral por un radical alcohólico.

Ejemplo:

$$(CH_3 - COOH) + (CH_2OH - CH_3) \rightarrow CH_3 - COO.C_2H_5 + H_2O$$

$$H.NO_3 + (CH_2OH - CH_3) \rightarrow NO_3C_2H_5 + H_2O$$

NOMENCLATURA

"Se le nombra con el nombre del radical halogénico del ácido (el nombre del ácido se hace terminar en ATO), seguido del nombre del radical alcohólico".

Ejemplos:

i) $CH_3 - (CH_2)_4 - COO.C_2H_5$

Exanoato de etilo

ii) $CH_4 - COO.C_4H_9$

Etanoato de butilo

iv) $SO_4\ (C_3H_7)_2$

Sulfato de propilo

v) $SO_3.(C_6H_{13})_2$

Sulfito de exilo

vi) $NO_3.C_2H_5$

Nitrato de etilo

vii) $ClO_4\ .\ C_3C_7$

Perclorato de propilo

FUNCIÓN SAL ORGÁNICA

Resulta de sustituir el hidrógeno H^+ del ácido orgánico por metales o radicales positivos de Química Inorgánica.

Ejemplo:

$$CH_3 - COO.H + NaOH \rightarrow CH_3 - COO.Na + H_2O$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra con el nombre halogénico del ácido, seguido del nombre iónico del metal".

Ejemplos:

i) $(C_3H_7 - COO)_2\ Cu$

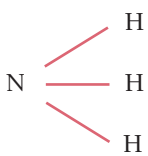
Butanato cúprico

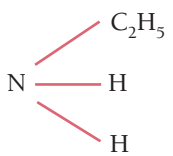
ii) $(CH_3 - COO)_3Al$

Etanoato de aluminio

FUNCIÓN AMINA

Resulta de la sustitución parcial o total de los H del amoníaco por radicales alcohólicos.



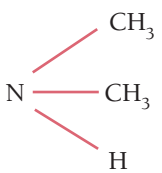


NOMENCLATURA

"Se les nombra con los nombres de los radicales alcohòlicos, seguido de la palabra AMINA".

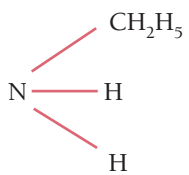
Ejemplos:

i)



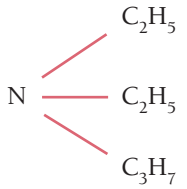
Di-metil – amina

ii)



Etil – amina

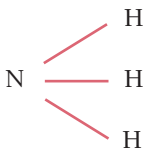
iii)



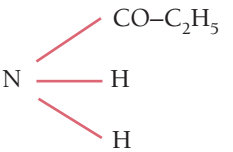
Di – etil – propil – amina

FUNCIÓN AMIDA

Resulta de la sustitución parcial o total de los hidrógenos del amoníaco por radicales ácidos. (Radical ácido es lo que queda del ácido al quitarle el grupo OH).



amoníaco



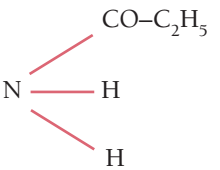
propano amida

NOMENCLATURA

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo que origina el radical ácido, seguido de la palabra AMIDA".

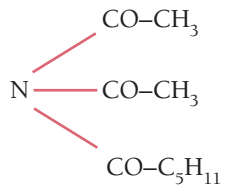
Ejemplos:

i)



Propano - amida

ii)



Di - etano - exano - amida

FUNCIÓN NITRILO

Resulta de la unión del CN–, monovalente del ácido cianhíldrico, con los radicales alcohólicos.

$$CN - C_2H_5$$

NOMENCALTURA

"Se les nombra con el nombre del hidrocarburo de tantos carbonos como haya en total, seguido de la palabra NITRILO".

Ejemplos:

i) $CN - C_3H_7$

Butano – nitrilo

ii) $CN - C_5H_{11}$

Exano – nitrilo

FUNCIÓN CIANURO

Resulta de la unión del radical CN – monovalente con un metal:

$$CN - K$$

NOMENCLATURA

"Se les nombra con la palabra CIANURO, seguido del nombre iónico del metal".

Ejemplos:

i) $CN - K$

cianuro de potasio

ii) $(CN)_3Fe$

Cianuro férrico

CUADRO DE LOS GRUPOS FUNCIONALES

GRUPO FUNCIONAL HIDROCARBURO	NOMBRE DE LA FUNCIÓN		NOMENCLATURA TERMINA EN
– CH_3	Primaria	HIDROCARBUROS	… ano
= CH_2	Secundaria		… eno
≡ CH	Terciaria		… ino

GRUPO FUNCIONAL ALCOHOL	FUNCIÓN		NOMENCLATURA
– CH_2OH	Primaria	ALCOHOL	… ol
= CHOH	Secundaria		… ol
≡ CH	Terciaria		… ol
– CHO	ALDEHÍDO		… al
= CO	CETONA		… ona
– COOH	ÁCIDO		… oico
– O –	ÉTER		… oxi …
– COO – R	ESTER		… ato de …ilo
– COO – R’	SAL ORGÁNICA		… ato de …

$R - NH_2$ R_2NH R_3NH	AMINA	Primaria Secundaria Terciaria	AMINA	… amina
$R'' - NH_2$ R''_2NH R''_3NH	AMIDA	Primaria Secundaria Terciaria	AMIDA	… amida
R – CN R' – CN		NITRILO CIANURO		…nitrito cianuro de …

R = radical alchol

R´ = radical mineral o positivo

R" = radical ácido

SERIE CÍCLICA

Son aquellos que tienen alguna cadena cerrada, formando anillo. Son de tres clases: alicíclica, bencénica y heterocíclica.

SERIE ALICÍCLICA

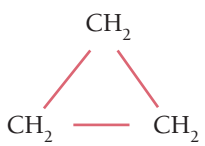
Es una serie cíclica de enlaces simples o a lo más dobles. No incluye el benceno, el cual forma una serie especial.

NOMENCLATURA

"Se les nombra anteponiendo la palabra CICLO al nombre del hidrocarburo de cadena abierta que la origina".

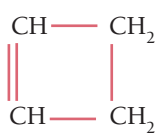
Ejemplos:

i)



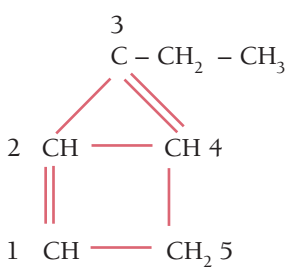
Ciclo.propapano

ii)



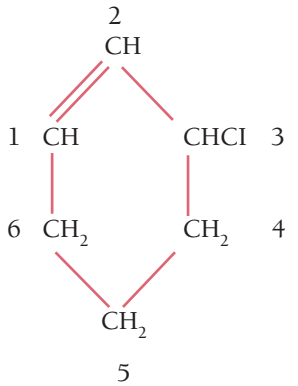
Ciclo- buteno

iii)



Etil.3 – ciclo – di – penteno.1.3

iv)

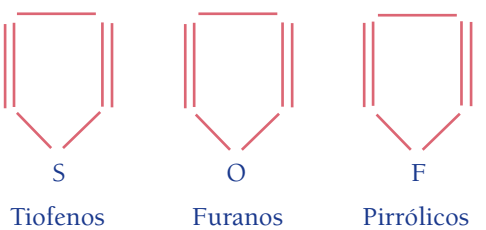


Clor.3 – ciclo – exeno. 1

SERIE HETEROCÍCLICA

Poseen uno o más elementos diferentes del C en los nudos de la cadena cerrada. Reciben distintos nombres de acuerdo con el elemento distinto de C que lo ha sustituído en la cadena.

Estos son los núcleos más importantes de esta serie:



BENCENO

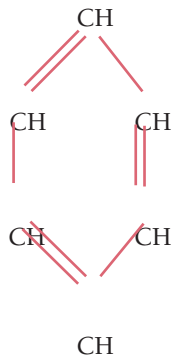
SERIE BENCÉNICA O AROMÁTICA

Posee como base el núcleo bencénico o llamado anillo de kekulé.

C_6H_6 o :

o:

o:



RADICAL FENILO

Resulta al quitarle un H al benceno.

C_6H_5 - o:

Este radical sustituye a los hidrógenos de los hidrocarburos o de los ácidos. Se les nombra así:

i) NO_3

o: $NO_3.(C_6H_5)$

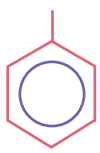
nitrato de fenilo

ii) $SO_4(C_6H_5)_2$

sulfato de fenilo

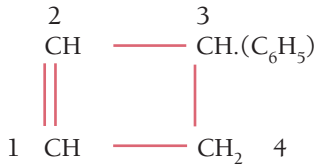
iii) 4 3 2 1

$CH_3 - CH = C - CH_3$



Fenil.2 – but – eno.2

iv)



Fenil.3 – ciclo – buteno.1

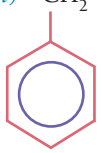
DERIVADOS DEL BENCENO

Resultan de sustituir uno o más H del benceno por radicales alcohólicos monovalentes o por metales. Pueden ser derivados mono, di y tri – sustituídos.

A) DERIVADOS MONOSUSTITUÍDOS

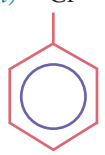
Se les nombra con el nombre de radical que sustituye al H, seguido de la palabra "benceno". Ejemplos:

i) $CH_2 - CH_3$



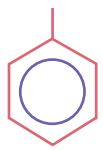
Etil – benceno

ii) Cl



Cloro-benceno

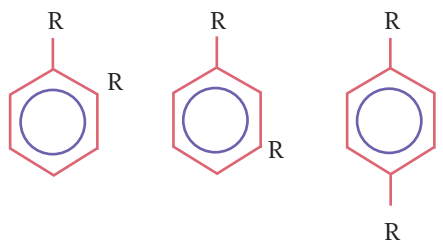
iii) I



Iodo benceno

B) DERIVADOS BISUSTITUÍDOS

Pueden ser ORTO, META o PARA, según la posición de los hidrógenos sustituídos.

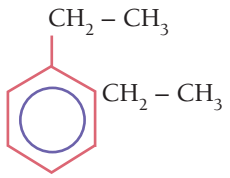


ORTO META PARA

Se les nombra con los prefijos ORTO, META o PARA, luego el nombre del radical seguido de la palabra "benceno".

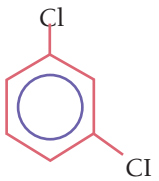
Ejemplos:

i)



Orto – di – etil – benceno

ii)



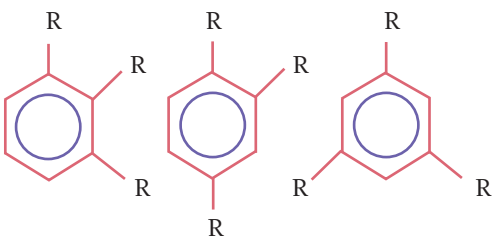
Meta – cloro – benceno

iii)

Para – butil – pentil – benceno

C) DERIVADOS TRISUSTITUÍDOS

Pueden ser: VECINAL, ASIMÉTRICO O SIMÉTRICO según la posición de los hidrógenos sustituídos.

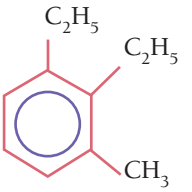


VECINAL ASIMÉTRICO SIMÉTRICO

Se les nombra con los nombres de los radicales que sustituyen los hidrógenos, luego, según lo que convenga, la palabra vecinal, asimétrico o simétrico, seguido de la palabra "benceno".

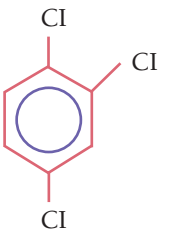
Ejemplos:

i)



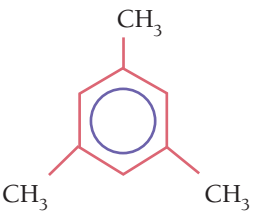
Metil . di – etil – vecinal – benceno

ii)



Tri – cloro – asimétrico – benceno

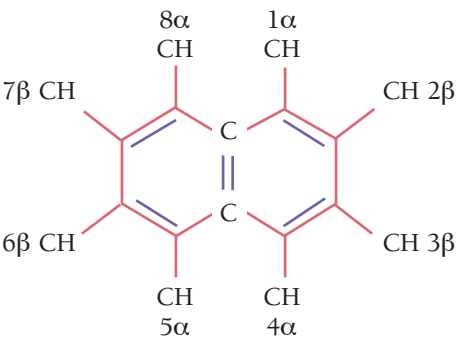
iii)



Tri – metil –simétrico – benceno

NAFTALENO

Resulta del acoplamiento de 2 bencenos:



Se le numera como se indica; hay 4 carbonos α, 4 carbonos β.

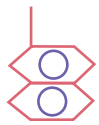
RADICAL NAFTIL

Resulta de quitarle 1H al naftaleno, según de donde sale el hidrógeno, el naftaleno puede llamarse α-naftil o β-naftil.

Ejemplos:

i) 4 3 2 1

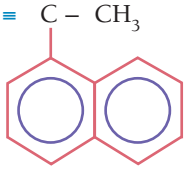
$CH_3 - CH - CH_2 = CH_2$



β-naftil.3-buteno.1

ii) 1 2 3

$C \equiv C - CH_3$



α-naftil-propino.1

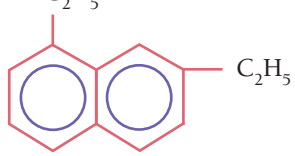
DERIVADOS DEL NAFTALENO

Resultan de sustituir un H α o β de naftaleno por un radical alcohòlico o metales.

Se les nombra, anteponiendo la letra α o β que corresponde al H sustituído, luego el nombre del radical, o mejor, si son varias las sustituciones con una numeración como la que se ha indicado, seguido de la palabra "naftaleno".

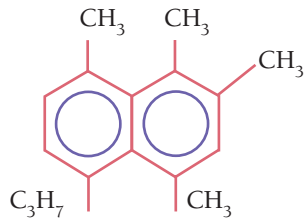
Ejemplos:

i)



α etil, β etil

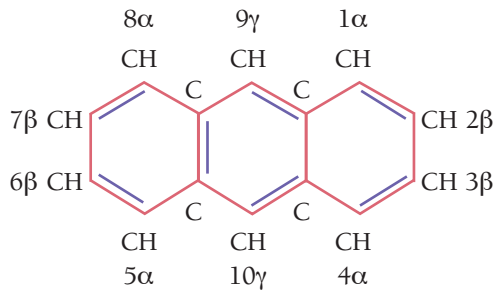
ii)



Tetra-metil 1.2.4.8-propil.5 naftaleno

ANTRACENO

Resulta del acoplamiento de 3 bencenos

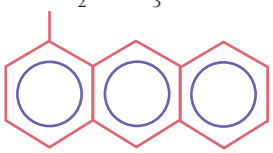


RADICAL ANTRACIL

Resulta de quitarle un H, sea α, o β o α o γ al antraceno; según esto, puede llamarse α naftil, β naftil o γ naftil.

Ejemplos:

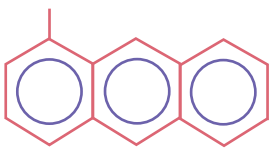
i) $CH_2 - CH_3$



α - naftil.2 – etano

ii) 6 5 4 3 2 1

$CH_3 - CH - CH - CH - C \equiv C$



γ naftil.5 – exa – eno.3 – ino. 1

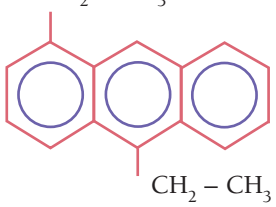
DERIVADOS DEL ANTRACENO

Resultan de sustituir un hidrógeno α, β o γ del antraceno por un radical alcohòlico o metal.

Cuando son uno o dos los hidrógenos sustituídos se les nombra indicando la letra griega del H sustituído, luego el nombre del radical y finalmente la palabra "antraceno". Sin embargo, cuando son varias las sustituciones se señala con los números indicados en la figura anterior.

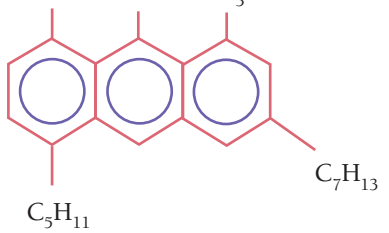
Ejemplos:

i)



etil – g etil – antaceno

ii)



Metil.1 – pentil.5 – heptil.3
– cloro.8 – sodio.9 - antraceno